# SOTO INKA

## LA YUPANA HUAROCHIRANA

Autor: Juan Carlos Soto Fernández

TOCANDO
LOS NÚMEROS

# SOTO INKA

## LA YUPANA HUAROCHIRANA

# ÍNDICE

**Capítulo I. La investigación** ..... **4**

Objetivos de la investigación ..... 6

Diseño de la investigación ..... 7

Utilidad de la investigación ..... 8

Definición de términos ..... 9

**Capítulo II. Pedagogía y el número** ..... **11**

Cardinalidad ..... 14

Sistema de numeración ..... 17

Material concreto y manipulativo ..... 18

El uno y el cero ..... 21

Sistema de representación del pensamiento ..... 22

**Capítulo III. Los números en los manuscritos de Huarochirí** ..... **23**

Funciones de los números en los manuscritos ..... 24

El número y el sistema de numeración en los manuscritos ..... 29

Revisión de los documentos: Nueva Crónica y Buen Gobierno, Los Comentarios Reales ..... 30

**Capítulo IV. Soto Inka: La yupana Huarochirana** ..... **41**

Representación del número ..... 44

Análisis lingüístico de la yupana matriz ..... 64

Función del número cero ..... 71

Operaciones aritméticas ..... 94

Referencias ..... 164

Anexo ..... 165

# CAPÍTULO I

LA INVESTIGACIÓN

# INTRODUCCIÓN

Mi nombre es Juan Carlos Soto Fernández, soy pedagogo. La pedagogía es la ciencia de la educación, que se encarga investigar, cómo los seres humanos han aprendido en estos tiempos y a lo largo de toda la historia. Cuáles son los elementos tangibles e intangibles para lograr el desarrollo e integración eficiente del individuo en la sociedad. Me especialicé en didáctica de las matemáticas, entre otros , el método Singapur, que es uno de los métodos con mejores resultados en la actualidad, prueba PISA (2022). El enfoque actual para la enseñanza en Perú es el de competencias descrito en el documento CNEB (2016). En matemáticas se tiene el enfoque por resolución de problemas.

Cuando supe de la existencia de los manuscritos de Huarochirí, quise comprender cómo los ancestros Huarochiranos concebían los números, cuáles eran las funciones que le daban a sus números, cuál es el sistema numérico que utilizaban.

Así, la investigación que he realizado, es una interpretación con base a los elementos tangibles e intangibles que he encontrado en este manuscrito. Complementando a la información, se explora la geografía y arquitectura de los lugares citados en los manuscritos. También se revisa y compara otros documentos de fechas cercanas como “Nueva Crónica, buen gobierno” de Don Huamán Poma de Ayala(1615?) y “Los Comentarios Reales” de Inca Garcilaso de la Vega (1609).

La investigación pretende explorar todo lo relacionado a los números: conceptos, sistema de numeración, materiales, métodos. Finalmente con todo lo recopilado sobre los números en los documentos y los restos arqueológicos se propone una yupana matriz llamada: el Inka Soto o Yupana Huarochirana, que es la construcción de una matriz para representar y operar números propuesto por el investigador, con base, a los elementos tangibles e intangibles recopilados. Llamada Yupana Huarochirana porque allí partió esta investigación etnomatemática.

El Inka Soto o Yupara Huarochirana, responde a la hipótesis sobre cómo calculaban nuestros ancestros andinos, tiene una importancia social, matemática, pedagógica, económica, pero sobre todo histórica.

En el siglo XII, en Europa el cero fue introducido por el matemático italiano Fibonacci. Antes desde grandes imperios como el romano, no llegaron a conocerlo. El registro más antiguo del cero en la humanidad, data en el año 683, en una inscripción camboyana de Angkor Wat, tallada en piedra, que incluye el número 605, en la India.

En esta investigación se demuestra mediante la inferencia que ya los incas y antes otras culturas andinas conocían el cero y lo operaban con magistralidad, quedando como registro para la humanidad. Este libro es la primera parte de la presentación de la investigación realizada.

# OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

**Objetivo General**

- Identificar los elementos tangibles e intangibles que hacen referencia a los números descritos en los manuscritos de Huarochirí desde un enfoque pedagógico.

**Objetivos Específicos**

- Identificar las funciones que cumplían los números.
- Identificar el sistema numérico o estructura que utilizaban para contar cantidades.
- Identificar los símbolos utilizados para representar los números
- Identificar los medios de registro de los números.
- Identificar cómo operaban los números.
- Determinar las relaciones entre los elementos tangibles e intangibles descritos sobre los números.
- Conceptualizar los elementos tangibles, intangibles y sus relaciones.
- Comparar la información de los manuscritos con los documentos “Nueva crónica y buen gobierno” de Don Huamán Poma de Ayala y “Los Comentarios reales” del Inca Garcilaso de la Vega, relacionado a los números y sus elementos tangibles e intangibles.
- Crear una yupana matriz, con base a la información documental y arqueológica que permita comprender como representar y operar cantidades: Soto Inka, la yupana Huarochirana.
- Demostrar que se desarrolló el concepto del cero en nuestras civilizaciones pre hispánicas y su proceso de desarrollo.

# DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

**Tipo**

Es una investigación cualitativa.

**Nivel**

La investigación es de nivel exploratoria de una sola variable que es interpretar a través de la fenomenología y la hermenéutica el fenómeno de los números en los manuscritos de Huarochirí a partir de las relaciones de sus elementos tangibles e intangibles.

**Recolección de datos**

Los datos recolectados son extraídos del documentos manuscritos de Huarochirí. Son testimonios de personas que vivieron en Huarochirí a inicios del siglo XVII (1608?), estos fueron escritos en quechua por un copista por encargo de Francisco de Ávila, sacerdote católico de la comunidad. Al ser testimonios no recolectados por el investigador (Juan Carlos Soto Fernández), son datos secundarios, es decir tiene la categoría de retrospectivos.

Se utiliza de forma complementaria para contraste y comparación otros documentos testimoniales: “Nueva Crónica, buen gobierno” de Don Huamán Poma de Ayala; “Los Comentarios Reales” del Inca Garcilaso de la Vega.

La clasificación y categorización utilizada en esta investigación se basa en el modelo de Mario Bunge.

# UTILIDAD DE LA INVESTIGACIÓN

**Pedagógico**

Identificar los elementos tangibles e intangibles de los números descrita en los manuscritos de Huarochirí, permite incorporar nuevos recursos, procedimientos, técnicas , métodos en la pedagogía.

**Social**

Permite aproximarse a cómo pensaba la comunidad respecto de los números, el rol de estos en la comunidad y en las decisiones que tomaban.

**Didáctico**

Se documentará los elementos tangibles e intangibles que aparecen en los manuscritos, Estos elementos pueden ser utilizados con fines didácticos en la creación de cuento, poesía, teatro, música, matemáticas, proyectos educativos, arqueología, danzas, agricultura entre otros.

**Investigación**

Abre puertas a nuevos estudios de exploración en las matemáticas, didáctica y en otras áreas de la ciencia.

**Económico**

Permite reflexionar sobre sociedades y su funcionamiento económico relacionado al conocimiento de los números en su organización.

**Identidad**

Invita a repensar perspectivas para poder comprender formas de actuar en el siglo XXI que están relacionadas con culturas ancestrales, en el vocabulario matemático, pensamiento matemático, valoración al orden, estética matemática, entre otros.

**Histórico**

Presenta por primera vez como las culturas pre hispánicas utilizaron el cero. Siendo la aparición del cero más antigua de la humanidad.

# DEFINICIÓN DE TÉRMINOS

Proceso educativo: Conjunto de fases sucesivas del fenómeno educativo.

Fenómeno educativo: constructo que surge de la relación entre los elementos tangibles e intangibles de la educación.

Pedagogía: Ciencia que busca el desarrollo e integración del individuo en la sociedad a través de la investigación en educación y metodología.

Elementos tangibles: Se pueden percibir desde los sentidos, están relacionados a las matemáticas: semilla, piedra, quipu, yupana,

Elementos intangibles: Se perciben mediante el razonamiento, están relacionadas a las matemáticas: concepto número, sistema numérico.

Manuscritos de Huarochirí: documento testimonial sobre la vida, creencias, perspectivas de las personas que habitaron Huarochirí desde tiempos antiguos a la llegada de los incas, españoles.

Ayllu: Parcialidad

Quipu: Sistema de registro de números.

Sistema educativo: Es la forma como está organizada la educación, los elementos que forman parte de este como las Instituciones, leyes para llevar a cabo los objetivos educativos.

Sistema numérico: Es la estructura o sistema para representar las grandes cantidades.

Número: Es el cardinal de un conjunto.

Yupana: Artefacto utilizado para representar y calcular las relaciones entre los números.

Numeral: la forma convencional como se representa la idea del número.

Soto Inka: Yupana Huarochirana, también llamada yupana matriz. Construcción pedagógica, creada por Juan Carlos Soto Fernández a partir de la información documental y arqueológica encontradas que permite comprender la transición de una matemática intuitiva hacia una hipotética deductiva.

# DEFINICIÓN DE TÉRMINOS

Material concreto: material que se usa para representar cantidades de manera discontinua. Cada bloque, semilla u otro material representa una unidad.

Material manipulativo: es un material que representa más de una cantidad y es de mayor abstracción, con relación al material concreto. Por ejemplo una semilla, puede representar 5 semillas.

Matemática estándar: la que utilizamos en occidente y utiliza los números arábigos, la base 10 en estructura unidades, decenas y su lógica.

Dimensión: espacio numérico que incluye a todos los órdenes que le preceden.

Hipótesis: Al ser una investigación de tipo exploratoria, el término hipótesis es usado con la connotación de interpretación, siguiendo la trazabilidad y marco pedagógico para respaldar la interpretación.

Memoria matemática: aquello que los contadores pre colombinos recordaban de las relaciones entre los números (sumas, restas, multiplicaciones), producto del trabajo constante y mecánico en la yupana,

Cero: número que tiene un signo, tiene el potencial de modificar a los demás números y tiene un valor fundamental, al igual que los demás números.

Uno: número que representa un único ente, elemento o grupo de conteo o de medida. Permite conectar a los demás números naturales y al cero a través de la inclusión o exclusión de la unidad.

La memoria matemática, viene a ser aquella información cristalizada de un número, en un espacio y tiempo. Así, cuando nuestros ancestros tenían:

Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB): documento donde se encuentra el perfil de egreso y competencias, que son las habilidades blandas que se espera se desarrollen al culminar el proceso educativo de la Educación Básica.

# CAPÍTULO II

## LA PEDAGOGÍA Y LOS NÚMEROS

# PEDAGOGÍA Y LOS NÚMEROS

En pedagogía los números tienen esencialmente tres funciones: la cardinalidad, la ordinalidad, la nominalidad.

La función cardinalidad , nos permiten contar los objetos del la naturaleza nombrando la cantidad que hay en ella representándola con un símbolo. La función ordinalidad nos permite ordenar, estructurar, dar jerarquía a un elemento o grupo dentro de un conjunto representándolo con un símbolo. Nominalidad, quiere decir nombrar, identificar un número con algún constructo o valor.

Vamos a analizar con estos tres criterios de funcionalidad del número, los manuscritos de Huarochirí; y ver que función ocupan los números dentro de los testimonios del documento. Es importante diferenciar, en adelante las palabras número y numeral; por numeral nos referimos a toda forma de representar un número: dibujo, una rayita, un círculo, una semilla, un hueco: 1, UNO, IV. Por número, nos referimos a lo que significa ese símbolo, qué significado le da el individuo, la comunidad o la cultura en un determinado tiempo a un símbolo, por ejemplo en nuestra cultura este símbolo o numeral “1”, significa que hay un elemento o hay un conjunto de uno. También puede significar en un determinado orden o lugar una decena, un millar, un millón. Consideraciones para transmitir conceptos matemáticos y cálculos:

I. Una estructura o sistema de ordenar y relacionar los números o conjuntos.

II. Comprender código de representación del símbolo.

III. El código debe durar lo suficiente para ser transmitido.

IV. Un medio para poder codificar los números, registrar y efectuar las operaciones.

Cuando los españoles llegaron América, se introdujo como estructura el sistema numérico decimal; el papel y tinta como medio de representación; los símbolos arábigos como numerales.

En las culturas pre hispánicas se utilizó otra tecnología para representar, operar y registrar los números.

Para representar, operar y registrar los numeros se utilizan semillas, yupana, sistema de dimensiones decimal, cero,

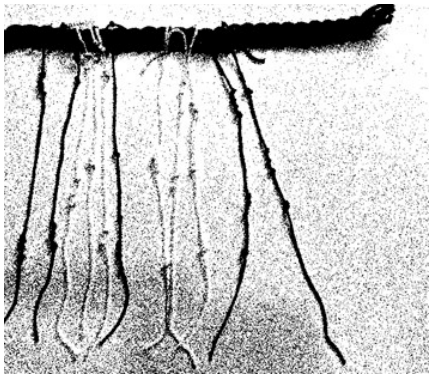
3

**Los números son las ideas y los numerales son los símbolos (diferentes formas de representar el número).**

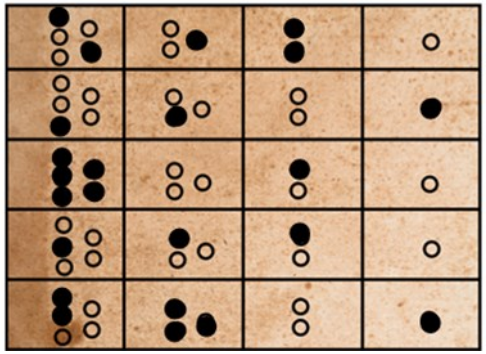
# PEDAGOGÍA Y LOS NÚMEROS

Por otro lado, las culturas pre hispánicas, utilizaban otros medios para representar los numerales como semillas, yupana; y otros para registrar como los quipus. Se sabe que se utilizaba el sistema numérico decimal. En el 2023 contamos con diversos medios para representar los símbolos de los números que pueden ser con la tinta sobre el papel, imprenta, incluso de manera virtual; y se puede mantener la información durante un tiempo prolongado para que pueda ser comunicado. En los andes, no contaban con la tecnología del papel, sin embargo, tuvieron otra tecnología para poder guardar su información: los quipus. Este material almacena información de diversa naturaleza por un largo tiempo. Los quipus no son, al parecer, un material para calcular, pero sí para registrar los números. Existe otro material, la yupana, donde se efectuaban también la representación de números, pero que por función principal tienen representar los números para ser operados. Por otro lado las semillas cumplen el rol de material concreto y manipulativo para representar números, de acuerdo, al uso que se le da.

**Representación de semillas.**
**Fuente: Autoría propia**



**Representación de un quipu.**
**Fuente: Autoría propia**



**Réplica del dibujo de la Yupana del documento Nueva crónica y buen gobierno (1615?). Fuente: Autoría propia**

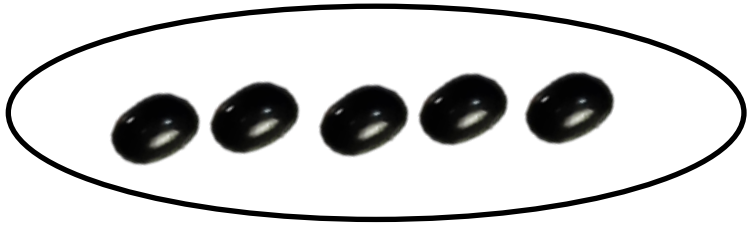
En esta investigación, vamos a explorar los elementos tangibles que nos pueden permitir acercarnos a los números: semillas, quipus, yupana; así como los elementos intangibles: sistema numérico, la nominalidad o significado que le daban los hombres ancestrales de Huarochirí y los andes a los números; y las relaciones de estos elementos.

Los manuscritos de Huarochirí, contienen descripciones interesantes y con valor histórico para analizar el valor que cumplen los números en la comunidad. Para ello citaremos párrafos de este documento y analizaremos los elementos que encontramos relacionados con los números.

# CARDINALIDAD

La cardinalidad es la función que cumple un número cuando expresa la cantidad total de elementos de un conjunto. Por ejemplo en la figura observamos semillas. Representar con la palabra ‘cinco’, ‘pichja’  para indicar el total, nos estamos refiriendo a la función cardinal. El cinco, no es la última semilla contada, si no e total de las semillas del conjunto. Por lo tanto al representar las semillas con el símbolo ‘5’, en este contexto representa al conjunto, es decir, al cardinal.

No solo se puede utilizar el lenguaje oral, escrito o el numeral para indicar la función cardinal, podría utilizarse un dibujo, una semillas u otro elemento, siempre y cuando el símbolo haga referencia al total de elementos del conjunto, nos estaremos refiriendo al cardinal del conjunto.



El símbolo 5  del conjunto de semillas, cumple el rol de describir el cardinal.

Esta semilla puede representar en un contexto 5 o 14 semillas. En este caso cumple la función cardinal.

El símbolo  14 del conjunto de semillas, cumple el rol de describir el cardinal.

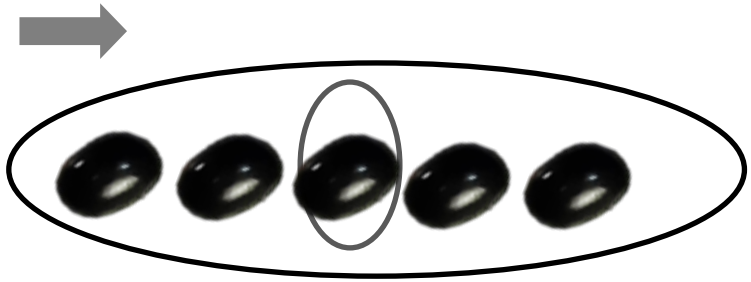
La cardinalidad es la función que cumple un número cuando expresa la cantidad total de elementos de un conjunto. Por ejemplo en la figura observamos semillas. Representar con la palabra ‘cinco’, ‘pichja’  para indicar el total, nos estamos refiriendo a la función cardinal. El cinco, no es la última semilla contada, si no e total de las semillas del conjunto. Por lo tanto al representar las semillas con el símbolo ‘5’, en este contexto representa al conjunto, es decir, al cardinal.

No solo se puede utilizar el lenguaje oral, escrito o el numeral para indicar la función cardinal, podría utilizarse un dibujo, una semillas u otro elemento, siempre y cuando el símbolo haga referencia al total de elementos del conjunto, nos estaremos refiriendo al cardinal del conjunto.

# ORDINALIDAD

La ordinalidad es la función que describe la posición de un elemento respecto a un conjunto ordenado, por ejemplo una seriación. Así, la importancia de esta función es que permite indicar con precisión al ubicación de un elemento.

En la figura 1, tenemos un conjunto de 5 elementos, sin embargo, el objetivo es identificar, que elemento ocupa el lugar 3 (también llamado tercer lugar, 3°). Así podemos indicar gracias a esta función del número, teniendo una referencia de partida, cuál es el lugar que tiene cada una de las semillas.



La semilla ocupa el lugar 3 o tercer lugar.

Esta semilla puede indicar un lugar, siempre y cuando se encuentre dentro de una estructura con puntos de referencia.

Aquí hay un conjunto desordenado y sin una referencia donde es difícil ubicar el lugar de cada elemento.

La ordinalidad, evoca el orden que hay para indicar un valor: quién llego primero, quien tiene mayor o menor jerarquía dentro de una estructura social, quién se encuentra en cuarto lugar.

Cuando se utiliza un número puede referirse a su función cardinal u ordinal o a ambas. Es importante tener un punto de referencia para comprender o determinar el lugar u orden de un elemento en un conjunto. Por otro lado una sola semilla puede indicar un determinado orden o muchos, se acuerdo a la posición que adquiera en una estructura, como lo detallaremos más adelante. En todos los casos, tener un punto de referencia y orden en el grupo p matriz es fundamental para que se ejecuta con eficacia esta función del número.

# NOMINALIDAD

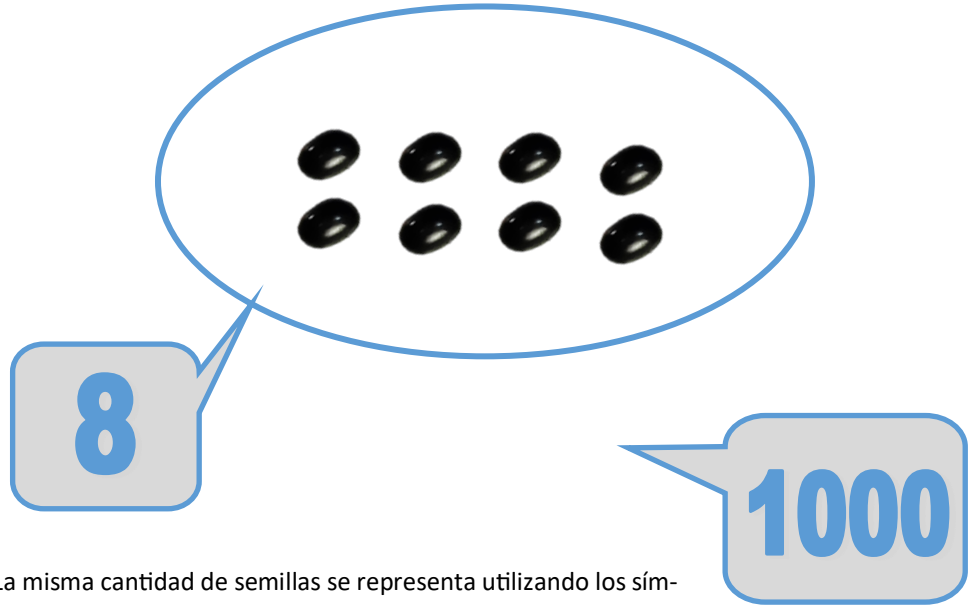
La función nominal se refiere al número como nombre de algo, donde su objetivo es ser el rótulo de un objeto, persona, constructo entre otros. Por ejemplo cuando utilizamos el número del documento de identidad, este uso no es para nombrar el cardinal o determinar el orden de algún elemento en el grupo, el número solo cumple la función de representar a través de ese código a una persona única dentro de una sociedad. Las situaciones donde un número cumple esta función son diversas, por ejemplo, decir 'el siete' para referirse a un jugador de fútbol. Dentro de una comunidad los números pueden asumir la función de representar algún acontecimiento: catástrofe, bienaventura, deidad, acontecimiento histórico, elemento estético.

El cinco representa a la deidad Pariacaca en los manuscritos de Huarochirí.

Un sapo de dos cabezas representa la malaventura en los manuscritos de Huarochirí.

## SISTEMA NUMÉRICO

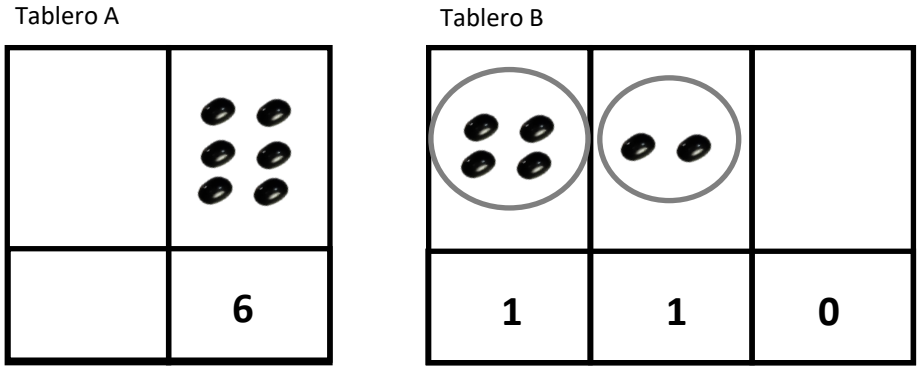
El sistema numérico es la forma como se agrupan los elementos de un conjunto para formar los diversos órdenes. Estos se representan con símbolos y cada símbolo adquiere un valor en función de su posición. En nuestra cultura se usa frecuentemente el sistema de base 10 que nos permite ordenar las cantidades en ordenes de unidad, decena, centena, unidad de mil y hacia adelante. Sin embargo, no es el único sistema, por ejemplo existe el sistema base 2 o sistema binario, que se utiliza como lenguaje de las computadoras, allí solo se emplean los números 1 y 0.




La misma cantidad de semillas se representa utilizando los símbolos 8 y 1000 que corresponden a la base 10 y 2. Esquema de libro Base Soto. Juan Soto (2023). Fuente: autoría propia.

## BASE 10 Y BASE 2

Las imágenes del libro Base Soto (Juan Soto,2023) del mismo autor se representa una misma cantidad de cubos que son 6 de diferente manera en los sistema de base 10 y 2 respectivamente. En el tablero A los números pueden tener hasta 9 elementos en el primer orden, porque cuando tienen 10 se agrupan en el siguiente orden como una decena. En el tablero B, de base 2, solo puede haber una semilla por cada orden, cuando hay dos se agrupa en el siguiente orden como una nueva unidad (1 grupo de 2), así sucesivamente, solo puede haber 1 o cero unidades en cada orden en este sistema. Existen infinitos sistemas y en cada uno de ellos muchas variantes. En esta investigación veremos que tipo de sistema utilizaban los ancestros huarochiranos y cuáles eran las características de este.




La cantidad de 6 cubos es representada de diferente manera, de acuerdo al sistema numérico utilizado.

# MATERIAL CONCRETO Y MANIPULATIVO

Material concreto en pedagogía, específicamente en didáctica de las matemáticas y para fines de esta investigación, es todo material que me permite representar algo, cuantificarlo y tiene un nivel básico de abstracción. Por ejemplo, coloco mi mano sobre una mesa y en cada dedo coloco una semillas, cada semillas cumple el rol de representar a un dedo, luego cuento las semillas, es decir, puedo cuantificarlas. Finalmente darme cuenta que cada semilla representa un dedo, es sencillo a la percepción, por lo que decimos que tiene un nivel básico de abstracción. Esto es lo que observamos en la figura A. En cambio en la figura B , vemos una moneda, ficha circular o carta representando el símbolo 5, no cumple con los requisitos de material concreto, por lo que si lo utilizamos dentro de la enseñanza, recibirá el nombre de manipulativo. Observamos que el material concreto tiene una naturaleza discontinua, es decir, se puede contar de uno en uno los elementos de cada grupo, mientras en los manipulativos no.

Figura A. Cada semilla, representa un dedo de una mano, es de naturaleza discontinua.

Figura B. Esta ficha circular es útil para la enseñanza, pero no es un material concreto.

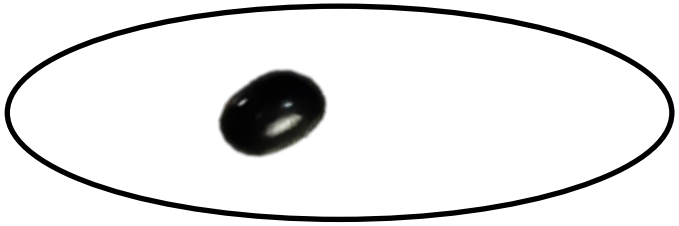


Figura C. Dentro de un sistema de base, una sola semilla puede representar a un grupo, por ejemplo de 6, 10, etc.

En la figura C, una sola semilla representa un grupo, por ejemplo: “la semilla, representa un grupo de 6 semillas”, en este caso la semilla ya no cumple la función de material concreto, sino de manipulativo. También en este caso está cumpliendo la función de cardinalidad. En esta investigación observaremos a detalle, la función que cumple cada número y la forma como organizaron su sistema de base para comunicar los números más grandes.

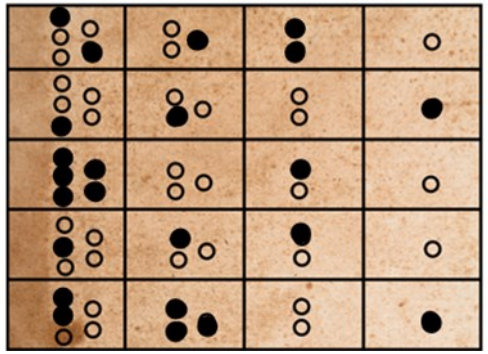
Los culturas andinas utilizaron para representar y operar los números, piedras, semillas. Desde una perspectiva pedagógica, empezaron a utilizar las semillas como material concreto, para luego darle un uso como manipulativo. En ambos casos los números pueden cumplir las funciones de ordinalidad, cardinalidad o ambas dentro de un grupo o un sistema de base.

# MATERIAL PARA REPRESENTAR Y OPERAR

Para representar una cantidad y operarla, hace falta tener un sistema de base o estructura en el pensamiento que nos permita tener un criterio para ejecutar. En la figura A, observamos un grupo de semillas, no sabemos cuántas son, están desordenadas, puede que algunos digan que hay catorce, sin embargo, esto solo es cierto si nos referimos a un sistema de base 10, porque en un sistema así, se agrupan de a 10 para obtener una decena, ordenando las decenas y unidades restantes como el la figura C. Vemos que no solo es el número y sus funciones, si no también el sistema donde se encuentra para poder representar y operar.

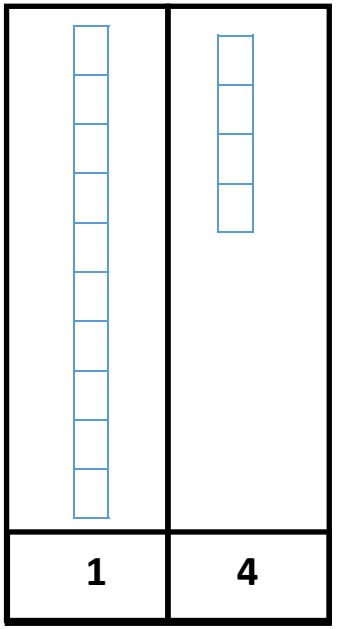
Figura A.

Figura B.



**Réplica del dibujo de la Yupana del documento Nueva crónica y buen gobierno (1615?). Fuente: Autoría propia**

Figura C.



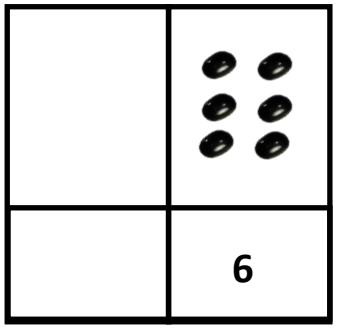

En la figura B, observamos un tablero de cinco filas por cuatro columnas con círculos de uno, dos, tres y cinco respectivamente de derecha a izquierda, algunos círculos están de negro y otros de blanco. Este tablero, llamado yupana, tiene la estructura que se encontró en el libro “Nueva crónica, buen gobierno” de Don Huamán Poma de Ayala (1615?). En ella, se describe que los contadores “Quipucamayoc” representaban las cantidades y operaban. Como vemos no solo son necesarias las semillas o los símbolos de los números para representar y operar, si no también un sistema de base. Este sistema se puede representar en un tablero como en la figura B y C.

# MATERIAL PARA REGISTRAR LA INFORMACIÓN

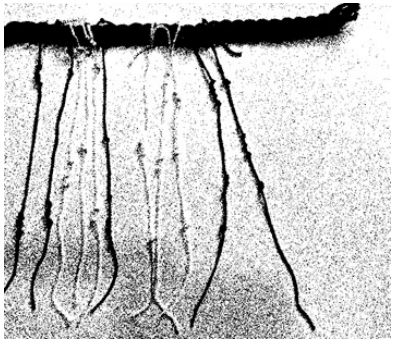
Tanto el tablero de yupana como los actuales tableros posicionales que utilizamos en pedagogía nos permiten representar y operar los números utilizando materiales: semillas, cubos conectores, base 10.

En la cultura occidental se llegó a adoptar los números arábigos y su uso se ha estandarizado en el mundo. Sin embargo, antes de la llegada de los españoles al territorio que hoy ocupa Perú, los nativos utilizaban las semillas y tableros u otros elementos tangibles e intangibles para representar y operar sus números. En el caso de la yupana, esta permitía representar y cuantificar los números. Sin embargo, para poder comunicar la información que contenía a largas distancias no era muy funcional. Por lo que la yupana que complementa con un material de registro llamado quipu.

Tablero A




Tablero B

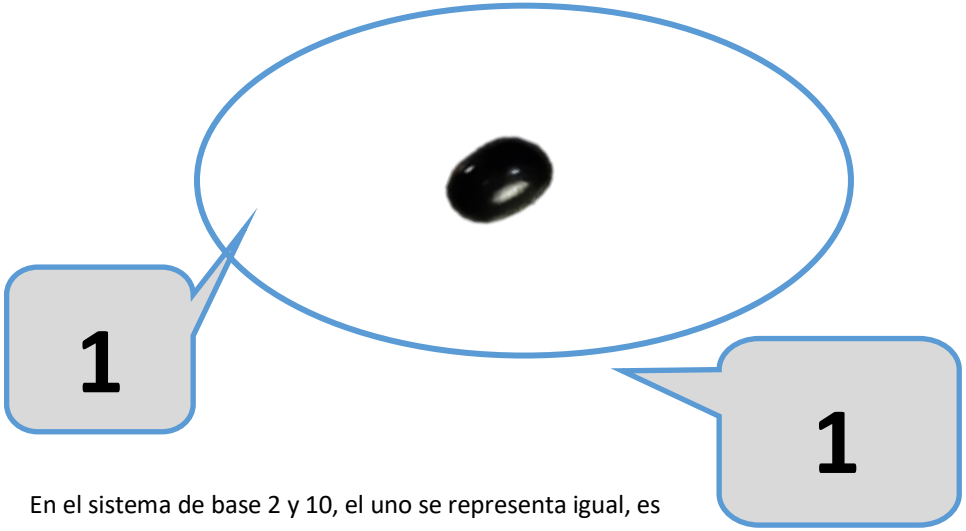


Los quipus son un sistema de registro de diversa información (historias, censo, números), en esta investigación nos referiremos en adelante a los numéricos. En la figura B, se visualiza un quipu, este tiene cordeles que se anudan y contienen información. La información se transmite a través de los colores, cantidas y tipo de nudos, distancia entre los nudos. Es posible que la yupana haya sido el material que ayudaba a representar y operar, mientras que el quipu servía para registrar lo operado en el tablero.

Pro su naturaleza de estabilidad, duración en el tiempo para contener la información, el quipu era el material por excelencia de registro de la información en las culturas ancestrales andinas. Los quipus más antiguos (2500 -2000 aC) se encuentran en Caral, una de las civilizaciones más antiguas de la humanidad.

## EL UNO

El uno es un constructo de la mente humana, que parte de relaciones lógicas para poder definirlo. En pedagogía para comprender lo que es un número es importante construir antes las nociones pre numéricas (secuencia, grupo, conservación, correspondencia entre otras). El uno es un número que representa un único elemento (tangible o intangible) o un grupo. Representa una única unidad para contar, medir, etc. El uno puede ser representado por un símbolo “1”, también por un material “semilla” o un dibujo “un círculo”, entre otras representaciones, todas ellas evocan a su propiedad que representa una única entidad. Algunos teóricos sostienen que el uno es el único número que existe, ya que los demás se crean a partir de este.




En el sistema de base 2 y 10, el uno se representa igual, es un número fundamental para todo conjunto.

## EL CERO

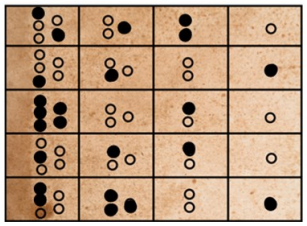
El cero es uno de los grandes descubrimiento para la humanidad. Parece normal hablar del cero o pensar que lo comprendemos, pero no siempre fue así. El cero fue introducido en Europa por el matemático italiano Fibonacci en el siglo XII, esto quiere decir que antes, desde los grandes imperios como el de Roma, no lo utilizaron. Cuando los españoles llegaron a Perú en el siglo XVI, no había pasado mucho tiempo histórico. Los jesuitas principalmente, por su gran nivel de cultura difundieron su uso en América. El primer testimonio del uso del cero está datado en el año 683 en una inscripción Camboyana de Angkor Wat, tallada en piedra, que incluye el número «605». Es decir, el registro más antiguo del cero fue hace 1418 años tomando como referencia el año 2023. Historicamente el primer uso documentado en América para el cero se realizó en la Cultura Maya, año 36 a.C. Como vemos el descubrimiento del cero, en nuestra historia, es tan reciente y las grandes implicancias que tuvo en las culturas que lo descubrieron. Pero qué significa el cero, cómo saber que una civilización lo ha descubierto. Esencialmente el cero como constructo quien lo usa debe saber que el cero tiene el potencial de que si acompaña a un número modifica el valor general del número. Debe existir una forma de codificar al cero: con un dibujo, material concreto, etc. También que el cero tiene un valor intrínseco más allá del símbolo, es decir comparte junto a los otros números ser un elemento del grupo. Esto también se puede ver cuando su ausencia significa algo más que solo vacío o que no hay algo, una ausencia de un orden determinado. En esta investigaciones exploraremos como las civilizaciones andinas manejaron con maestría el cero. Siendo el Tawantinsuyo a través del inca, los maestros en manejar los ceros. Con posibilidad que se hay utilizado desde la civilización de Caral como se describirá en esta investigación.

# SISTEMA DE REPRESENTACIÓN DEL PENSAMIENTO

En los 70, Jerome Bruner a través de su teoría del desarrollo cognitivo de los niños, propone tres modos de representación: enactiva, icónica y simbólica. En pedagogía se utiliza estos procesos para organizar al enseñanza, también para describir como construyen los conceptos los niños. En didáctica de las matemáticas se le llama CPA (siglas de concreto, pictórico y abstracto) o COPISI. Estos procesos permiten ordenar los juegos, materiales pertinentes par cada uno de estos tres modos. Es muy importante entender estos procesos para realizar una aproximación de cómo pudieron nuestros ancestros construir los números, construir el cero, construir un sistema de base. Desde este enfoque CPA. Podemos decir que cuando una persona utiliza seis semillas para representar el número 6, las semillas cumplen la función de material concreto; si dibujo las seis semillas, me encuentro en un proceso pictórico; si represento las 6 semillas con una sola semilla (ver material manipulativo) o con el numeral “6”, nos encontramos en el proceso abstracto. Para pasar de un proceso a otro hacen falta puentes cognitivos.

Imagen 1

Imagen 2



**Réplica del dibujo de la Yupana del documento Nueva crónica y buen gobierno (1615?).**

Imagen 3

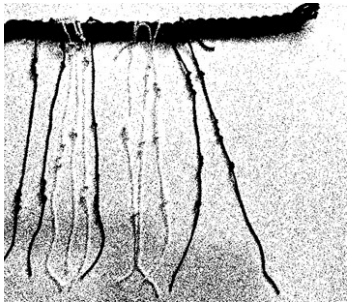


Imagen 4

Imagen 5

Imagen 6

**2**

Independientemente de los materiales, medios para representar, registrar, símbolos que se utilicen para las cantidades, el ser humano transita por etapas de una abstracción básica hasta una abstracción compleja dentro de su cultura. En las imágenes 1,2 y 3 vemos una posible e hipotética ruta de esta transición del CPA, considerando las semillas como material concreto; si existiera semillas o una yupana dibujadas en alguna superficie con sus puntos (no la estructura real de piedra o arcilla o semillas) se encontraría dentro del proceso pictórico; y los quipus como proceso abstracto para el registro. La yupana como material estructural hecha de piedra, arcilla con sus semillas se encuentra en el proceso abstracto junto a los quipus. En la figura 4, 5 y 6 vemos como representamos actualmente desde los concreto con cubos, pictórico: el dibujo de los cubos y simbólico el numeral “2”. Cada civilización a transitado, según los medios a su disposición, de una matemática intuitiva hacia una matemática formal.

# CAPÍTULO III

## LOS NÚMEROS Y LOS MANUSCRITOS DE HUAROCHIRÍ

# LOS NÚMEROS Y LOS MANUSCRITOS DE HUAROCHIRÍ

“En tiempos muy antiguos existió un huaca llamado Yanamca Tutañamca. Después de estos huacas, hubo otro huaca de nombre Huallallo Carhuincho. Este huaca venció. Cuando ya tuvo poder, ordenó al hombre que sólo tuviera dos hijos. A uno de ellos lo devoraba, al otro, al que por amor escogieran sus padres, lo dejaba que viviera. Y desde entonces, cuando moría la gente, revivían a los cinco días, y del mismo modo, las sementeras maduraban a los cinco días de haber sido sembradas. Y estos pueblos, los pueblos de toda esta región, tenían muchos yuncas”.

(Manuscrito de Huarochiri. Capítulo I, 1608?)

Los manuscritos de Huarochirí comienzan en el capítulo I de título “Cómo fueron antiguamente los ídolos y cómo guerrearon entre ellos y cómo fueron antiguamente los naturales”. Se describe la historia de un huaca , ser o espacio sagrado, llamado Huayllallo Carhuincho que cuando venció a otra huaca y tuvo poder, ordenó a los hombre a solo tener dos hijos. Observamos que el número *dos* cumple la función de cardinalidad, describe al conjunto de hijos. Líneas más abajo se describe que cuando la gente moría, revivía en *cinco* días y del mismo modo las sementeras o tierras de cultivo hacían dar fruto cada cinco días. Vemos que el número cinco cumple una función de ordinalidad, lo que equivale a decir el quinto día, pero también como veremos más adelante tiene una función nominal, representa un suceso relacionado a renacer, crear, muerte o destrucción.  Exploremos el cuadro.

| **Número** | Cardinalidad | Ordinalidad | Nominalidad |
|---|---|---|---|
| 2 | Grupo de dos | x | x |
| 5 | x | Al quinto día reviven, al quinto día maduran | Significado de crear, destruir, nacer, morir. |
| 5 | X | Llama predice que se acabará el mundo en | Significado de crear, destruir, nacer, morir. |

# LOS NÚMEROS Y LOS MANUSCRITOS DE HUAROCHIRÍ

“Y cuando debían empezar algún trabajo difícil, a él adoraban, arrojando hojas de coca al suelo: "has que recuerde esto, que lo adivine Cuniraya Viracocha", diciendo, y sin que pudieran ver a Viracocha, los muy antiguos le hablaban y adoraban. Y mucho más los maestros tejedores que tenían una labor tan difícil, adoraban y clamaban. Por esa razón hemos de escribir de las cosas que ocurrieron antes que él (Cuniraya) existiera, junto con los sucesos de Pariacaca”.

(Manuscrito de Huarochiri. Capítulo I, 1608?)

“Y así, en ese tiempo, había una huaca llamada Cavillaca. Era doncella, desde siempre. Y como era hermosa, los huacas, ya uno, ya otro, todos ellos: "voy a dormir con ella", diciendo, la requerían, la deseaban. Pero ninguno consiguió lo que pretendía. Después, sin haber permitido que ningún hombre cruzara las piernas con las de ella, cierto día se puso a tejer al pie de un árbol de lúcuma”.

(Manuscrito de Huarochiri. Capítulo II, 1608?)

En el mismo capítulo, se plantea la relación temporal entre los dioses y como los hombres les invocaban y ofrendaban para pedir favores. Es interesante saber que en la descripción de las comunidades ancestrales Huarochiranas, habían maestros tejedores y se reconocía lo difícil de su labor. Este hecho nos permitirá plantear hipótesis relacionadas al medio para representar los números. Recordemos que los quipus están hechos de lana de animales. Si bien no se puede plantear con estos datos sobre si utilizaban quipus, sí vemos que existe la posibilidad material para que los hay habido. En el siguiente relato, se describe un encuentro entre deidades en la que una de ellas, una huaca llamada Cavillaca realiza actividades de tejido. El tejido lo encontramos tanto en actividades cotidianas en los manuscritos como en la mitología.

# LOS NÚMEROS Y LOS MANUSCRITOS DE HUAROCHIRÍ

“Lo que ellos cuentan es como sigue: en tiempos antiguos este mundo estuvo en peligro de desaparecer. Un llama macho que pastaba en una montaña con excelente yerba, sabía que la Madre Lago (el mar) había deseado (y decidido) desbordarse, caer como catarata. Este llama entristeció; se quejaba: "in, in", diciendo lloraba, y no comía. El dueño del llama, muy enojado, lo golpeó con una coronta de choclo: "Come, perro –le dijo– tú descansas sobre la mejor yerba". Entonces el llama, hablando como si fuera un hombre, le dijo: "Ten mucho en cuenta y recuerda lo que voy a decirte: ahora, de aquí a cinco días, el gran lago ha de llegar y todo el mundo acabará", así dijo, hablando. Y el dueño quedó espantado; le creyó”

(Manuscrito de Huarochirí. Capítulo III, 1608?)

“ En tiempos antiguos dicen que el sol murió. Y, muerto el sol, se hizo noche durante cinco días. Las piedras, entonces, se golpearon entre ellas mismas, unas contra otras; desde entonces se formaron los llamados morteros, es decir las muchcas, y también los batanes. Los hombres empezaron a comer en esas cosas; las llamas de los cerros comenzaron ya a seguir al hombre”.

(Manuscrito de Huarochiri. Capítulo IV, 1608?)

En el capítulo III, de los manuscritos de Huarochirí, se describe como una llama habla con su dueño y le da un pronóstico que en cinco días, el mundo se acabará. En diferentes narraciones vamos a encontrar que los números además de cumplir una función de cardinalidad u ordinalidad, tienen un valor religioso dentro de la comunidad y sus creencias. En el siguiente texto del capítulo IV, se narra como el sol desapareció cinco días.

# EL NÚMERO Y SU FUNCIÓN NOMINAL EN LOS MANUSCRITOS

“Ya, sí, en los cuatro capítulos anteriores, hemos contado la vida del mundo antiguo, pero no sabemos cómo apareció en esos tiempos el hombre, en qué sitio apareció, y cómo luego de aparecido, en esos tiempos, vivieron odiándose, luchando entre ellos. Sólo reconocían como a curacas a los ricos y a los poderosos. A ellos, a esos antiguos, los llamamos hombres montaraces, silvestres. En ese tiempo, el denominado Pariacaca nació de cinco huevos en el sitio llamado Condorcoto”.

(Manuscrito de Huarochirí. Capítulo V, 1608?)

CAPITULO 6

"Cómo Pariacaca nació cinco alcones y después tornó en personas y como estando ya vencedor de todos los yuncas de Anchicocha empezó a caminar al dicho Pariacaca y lo que sucedió por los camino”.

(Manuscrito de Huarochirí Título. Capítulo VI, 1608?)

Los números además de representar la cantidad y el orden, tienen un significado sagrado dentro de la comunidad ancestral. En el transcurso de los relatos encontraremos representadas el nacimiento de una huaca de cinco montañas o huevos como en el caso de la huaca Pariacaca.

También observaremos que algunos animales con cualidades como un sapo de dos cabezas es asociado a la enfermedad o cuando nacen mellizos dos hombres o dos mujeres son asociados a que habrá un mal tiempo en la cosecha. Si bien, no se puede generalizar el uso del número dos con un suceso malo, es interesante como el número cumple la función dentro de la cardinalidad, ordinalidad, pero también dentro de la cultura de la comunidad.

# EL NÚMERO Y SU FUNCIÓN CARDNAL EN LOS MANUSCRITOS

"...Toda clase de llamas tenía. Este hombre, viendo que su vida era regalada, hizo venir gente de los pueblos de todas partes, los ennumeró; y entonces, mostrándose como si fuera un sabio, engañando con su poco entendimiento a muchísimos hombres, vivió. Así pudo hacerse considerar como un verdadero sabio, como un dios, este llamado Tamtañamca…".

(Manuscrito de Huarochirí. Capítulo V, 1608?)

En este relato, se describe a Tamtañamca, como un hombre con mucha riqueza, que dio una invitación o hizo venir a mucha gente a sus tierras. Es interesante que se cita que los enumeró. Podemos hipotetizar que la cantidad de personas que llegó fueron muchas y reflexionar de la forma como puedo enumerarlas. Sin duda, se contaron, pero cómo las contó, con que medio sumo cada grupo (familia o pueblo), cómo lo registró, en qué medio material.

Recordemos que en el análisis de anteriores capítulos vimos que se narra sobre maestros tejedores e incluso una huaca teje dentro de la mitilogía. Existe la posibilidad que ese registro de la población se haya llevado a través de los quipus.

En la actualidad se da, la ritualidad y uso social de los quipus en la comunidad campesina de San Andrés de Tupicocha, provincia de Huarochirí. No se utiliza como un material de registro numérico, pero sí como un símbolo de respeto y comunidad. Quizá en otros tiempo sí se utilizó quipus con fines de censo. Lo cierto es que en los relatos del manuscrito se enumeró a los pueblos que fueron invitados por Tantañamca.

# EL NÚMERO Y SISTEMA NUMÉRICO EN LOS MANUSCRITOS

“ A esa hora, le ofrendaban cada quien lo que podía, cuyes y otras especies, y le hablaban: "Ayúdame, auxilia a este pueblo; tú eres quien lo guardas. Tú alivias todas las enfermedades", le decían.

En el pueblo que hemos llamado Limca era donde mejor servido estaba (Macahuisa). Una chacra que se llamaba Yamlaca era sembrada por | una huaranca (mil) de hombres; ellos empleaban toda su fuerza en esa chacra, para que este Macahuisa tuviera mucho que beber”.

(Manuscrito de Huarochirí. Capítulo XIX, 1608?)

"Padres míos, huacas, sacras personas: bien saben ustedes con cuanto amor y con todo el corazón les sirvo, ofrendándoles oro y plata. Ustedes saben eso. Siendo así no podrían ayudarme, darme vuestro auxilio en esta guerra en que tantos miles de mis hombres pierdo? Para hacerles esta pregunta los he convocado. Así habló el Inca. Pero nadie le contestó. Los huacas parecían sordos.

Ninguno dijo "ay", siquiera”.

(Manuscrito de Huarochirí. Capítulo XXIII, 1608?)

En el capítulo XIX, encontramos una descripción importante para entender cómo las personas contaban y ordenaban los grandes números. Se describe que una chacra era sembrada por mil hombres. Se puede decir, que utilizaron el sistema numérico decimal, es decir, agrupaban los números de diez en diez. En el capítulo XXIII, confirmamos la hipótesis cuando el inca menciona: “miles de miles...”, más allá que es podría ser una expresión, demuestra que si se agrupaban en el sistema numérico decimal o de base 10. Cómo los contaban o registraban, no aparece, pero exploraremos esa situación, líneas abajo.

# REVISIÓN DE LOS DOCUMENTOS: NUEVA CRÓNICA Y BUEN GOBIERNO

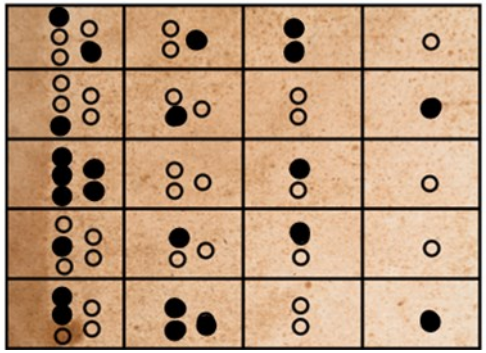
“ ...A las provincias para que deje y asiente por quipo y cuenta razón, estos tenían tanta habilidad, pues que en los cordeles supo tanto, que me hiciera si fuera en letra; con los cordeles gobernaban todo el reino. Este fue el buen Monteroso, que escribía sin mentira y sin cohecho ninguno, era cristianísimo.

/361[363] Contador y Tesorero. Contador mayor de todo este reino, Condor Chaua, hijo de Apo, a éste le llamaban Tauantinsuyo runa quipoc Incap haciendan chasquicoc, tesorero mayor; dice que este principal tenía gran habilidad, para saber su habilidad el Inga lo mandó contar y numerar, ajustar con los indios de este reino, con la lana del ciervo, taruga, emparejaba con la lana a los indios, y emparejaba con una comida llamada quínua, contaba la quinua y los indios; fue muy grande su habilidad, mejor fuera en papel y tinta. Contador mayor hatun hucha quipoc, contador menor huyuy hucha quipoc, cuentan en tablas, numeran de cien mil, y de diez mil, y de ciento, y de diez, hasta llegar a uno, de todo lo que pasa en este reino lo asienta, y fiestas y domingos, y meses, y años, y en cada ciudad y villa, y pueblos de indios había estos dichos contadores y tesoreros en este reino. Y contaban de esta manera: comenzando de uno, dos y tres; huc [uno], iscay [dos], quimza [tres], taua [cuatro], pichica [cinco], zocta [seis], canchis [sicte], puzag [ocho], iscon [nueve], chunga [diez), iscay chunga [veinte], quimza chunga [treinta], taua chunga [cuarenta], pisca chunga [cincuenta], voc tac chunga [sesenta), canchis chunga [setenta), puzac chunga [ochenta]. iscon chunga [noventa], pachaca [cien], uaranga [mil], chunga uaranga ”.

(Nueva crónica, buen gobierno. Capítulo XXIII, p. 260. 1615?)

En el documento “Nueva Crónica, buen gobierno” de Don Huamán Poma de Ayala, se describe las habilidades de un contador, el curaca Condor Chaua. Se menciona también que cuentan en tablas y una información muy importante para entender la estructura de la tabla o tablas (yupana?) que utilizaba: numeran de 10 000, 10 000, 100, 10 hasta llegar a 1. No menciona el nombre de mil (Huaranga en quechua) en la forma de numerar o contar que utiliza en la tabla. Esto es interesante porque líneas abajo escribe mil como número, más no lo mencionó como estructura u orden dentro del tablero. Este detalle lo exploraremos más adelante.

# LOS NÚMEROS Y NUEVA CRÓNICA Y BUEN GOBIERNO

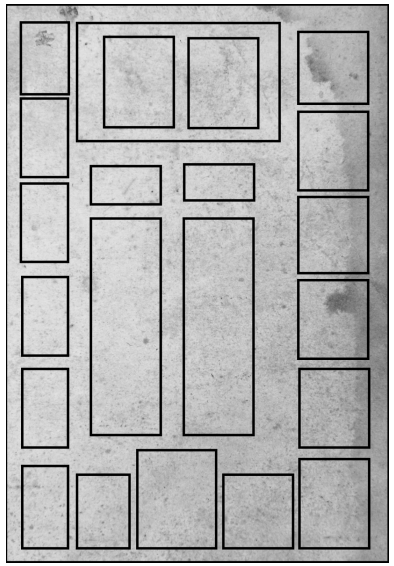


**Réplica del dibujo de la Yupana del documento Nueva crónica y buen gobierno (1615?).**

En la imagen aparece una yupana , con el esquema del dibujo , de Don Huamán Poma de Ayala, tiene una estructura de cinco filas por cuatro columnas, marcadas por segmentos. En ellas se visualizan puntos oscuros y blancos. Algunos historiadores sostienen que los puntos blancos representan huecos y los negros semillas. Otros sostienen que los ´punto blancos representan alguna semilla claras y los puntos negros semillas oscuras. Han surgido muchas hipótesis acerca de cómo se representaba y operaba los números en las yupanas. En la arqueología se ha descubierto yupanas en países como Perú, Ecuador, estas han sido de arcilla, piedra. Es fin de esta investigación proponer la forma como se operaba con la yupana, cuál fue el proceso para conocer el número y construir un sistema numérico. En esta etapa se puede concluir que las yupanas servían para representar y operar número, cómo lo hacían, es lo que veremos más adelante.

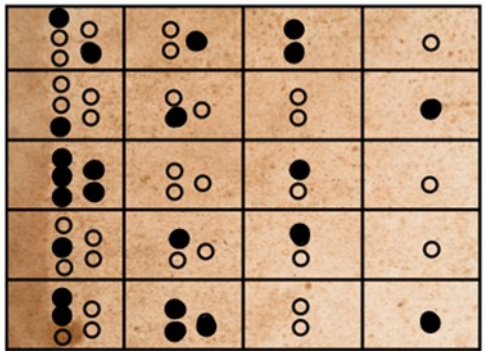
# LA TAPTANA, YUPANA Y LOS QUIPUS

En un análisis transversal de estos documentos, podemos encontrar puntos donde coinciden: se utilizan los números en su función cardinal, nominal. Los números se agrupan de a diez para construir números más grandes, utilizaban el sistema de base 10, es importante reflexionar que existen muchas variantes en el uso de este sistema en las diferentes culturas de todos los tiempos. Pueden contar hasta cantidades muy grandes: “miles de miles...”; “cien mil….”. Se contaba a la población, existía el medio tanto en el medio descrito en el manuscrito como en el medio escrito por Huamán Poma de Ayala para la escritura: semillas, tejidos. No existe un análisis profundo de parte de los relatores sobre los números, sin embargo a través de los datos que vamos recopilando nos dan mayor detalle acerca de los números, sistema base, medios para la representación, operación y registro de los números. En el documento “Los comentarios reales” del Inca Garcilaso de la Vega, se describe que había contadores que utilizaban los quipus para sus registros. Podríamos pensar, entonces también el uso de yupanas; y si las hubo cómo eran.



**Réplica de la estructura de una taptana. Fuente: Autoría propia**

Se han encontrado diversos tableros, de diversa composición: madera, piedra, arcilla, con diferentes estructuras. Algunos de ellos se les ha denominado taptana a otros yupana. Se cree que se utilizaron en el caso de las taptanas para juegos, ceremonias y en el caso de las yupanas para calcular. En nuestra línea de investigación que es pedagógica, donde intentamos descubrir cómo se construye el número, el sistema base, como se representan, operan y registran, nuestra hipótesis es que se utiliza la llamada taptana para la enseñanza previa de los números antes de utilizar la yupana. En la taptana se pueden representar con semillas los números, se puede enseñar agrupar de diez , formar diez grupos de diez, sucesivamente para construir las nociones de órdenes. El material tiene el potencial pedagógico para serlo y cumplir esta función. Por otro lado las yupanas tiene diversas estructuras, tienen huecos. Es interesante contrastar con el dibujo de la  yupana del libro “Nueva crónica y buen gobierno” de Don Huamán Poma de Ayala.



**Réplica del dibujo de la  Yupana del documento Nueva crónica y buen gobierno (1615?). Fuente: Autoría propia**

# REVISIÓN DE LOS DOCUMENTOS: LOS COMENTARIOS REALES

Capítulo VIII: Contaban por hilos y nudos; había gran fidelidad en los contadores:

“ Quipu quiere decir anudar y nudo, y también se toma por la cuenta, porque los nudos la daban de toda cosa. Hacían los indios hilos de diversos colores: unos eran de un solo color, otros de dos colores, otros de tres y otros de más, porque las colores simples, y las mezcladas, todas tenían su significación de por sí; los hilos eran muy torcidos, de tres o cuatro liñuelos, y gruesos como un huso de hierro y largos de a tres cuartas de vara, los cuales ensartaban en otro hilo por su orden a la larga, a manera de rapacejos. Por los colores sacaban lo que se contenía en aquel tal hilo, como el oro por el amarillo y la plata por el blanco, y por el colorado la gente de guerra.

Las cosas que no tenían colores iban puestas por su orden, empezando de las de más calidad y procediendo hasta las de menos, cada cosa en su género como en las mieses y legumbres. Pongamos por comparación las de España: primero el trigo, luego la cebada, luego el garbanzo, haba, mijo, etc. Y también cuando daban cuenta de las armas, primero ponían las que tenían por más nobles, como lanzas, y luego dardos, arcos y flechas, porras y hachas, hondas y las demás armas que tenían. Y hablando de los vasallos, daban cuenta de los vecinos de cada pueblo, y luego en junto los de cada provincia: en el primer hilo ponían los viejos de sesenta años arriba; en el segundo los hombres maduros de cincuenta arriba y el tercero contenía los de cuarenta, y así de diez a diez años, hasta los niños de teta. Por la misma orden contaban las mujeres por las edades.

Algunos de estos hilos tenían otros hilitos delgados del mismo color, como hijuelas o excepciones de aquellas reglas generales; como digamos en el hilo de los hombres o mujeres de tal edad, que se entendían ser casados, los hilitos significaban el número de los viudos o viudas que de aquella edad había aquel año, porque estas cuentas eran anuales y no daban razón más que de un año solo. Los nudos se daban por su orden de unidad, decena, centena, millar, decena de millar, y pocas veces o nunca pasaban a la centena de millar, porque, como cada pueblo tenía su cuenta de por sí y cada metrópoli la de su distrito, nunca llegaba el número de éstos o de aquéllos a tanta cantidad que…”

**Los comentarios reales. Capítulo VIII. P. 333. Inca Garcilaso de la Vega.(1609).**

# REVISIÓN DE LOS DOCUMENTOS: LOS COMENTARIOS REALES

Capítulo VIII: Contaban por hilos y nudos; había gran fidelidad en los contadores:

“ ...pasase la centena de millar, que en los números que hay de allí abajo tenían harto. Mas si se ofreciera haber de contar por el número de centena de millar, también lo contaran; porque en su lenguaje pueden dar todos los números del guarismo, como él los tiene, mas porque no había para qué usar de los números mayores, no pasaban de la decena de millar. Estos números contaban por nudos dados en aquellos hilos, cada número dividido del otro; empero, los nudos de cada número estaban dados todos juntos, debajo de una vuelta, a manera de los nudos que se dan en el cordón del bienaventurado patriarca San Francisco, y podíase hacer bien, porque nunca pasaban de nueve como pasan de nueve las unidades y decenas, etc.

En lo más alto de los hilos ponían el número mayor, que era la decena de millar, y más abajo el millar, y así hasta la unidad. Los nudos de cada número y de cada hilo iban parejos unos con otros, ni más ni menos que los pone un buen contador para hacer una suma grande. Estos nudos o quipus los tenían los indios de por sí a cargo, los cuales llamaban quipucamayu: quiere decir, el que tiene cargo de las cuentas, y aunque en aquel tiempo había poca diferencia en los indios de buenos a malos, que, según su poca malicia y el buen gobierno que tenían todos se podían llamar buenos, con todo eso elegían para este oficio y para otro cualquiera los más aprobados y los que hubiesen dado más larga experiencia de su bondad. No se los daban por favor, porque entre aquellos indios jamás se usó favor ajeno, sino el de su propia virtud. Tampoco se daban vendidos ni arrendados, porque ni supieron arrendar ni comprar ni vender, porque no tuvieron moneda. Trocaban unas cosas por otras, esto es las cosas del comer, y no más, que no vendían los vestidos ni las casas ni heredades.
Con ser los quipucamayus tan fieles y legales como hemos dicho, habían de ser en cada pueblo conforme a los vecinos de él, que, por muy pequeño que fuese el pueblo, había de haber cuatro, y de allí arriba hasta veinte y treinta, y todos tenían unos mismos registros, y aunque por ser los registros todos unos mismos, bastaba que hubiera un contador o escribano, querían los Incas que hubiese muchos en cada pueblo y en cada facultad, por escusar la falsedad que podía haber entre los pocos, y decían que habiendo muchos, habían de ser todos en la maldad o ninguno “.

**Los comentarios reales. Capítulo VIII. P. 334. Inca Garcilaso de la Vega.(1609).**

# REVISIÓN DE LOS DOCUMENTOS: LOS COMENTARIOS REALES

Capitulo XXVI: De la Geometría, Geografía, Aritmética y Música que alcanzaron:

“ De la Geometría supieron mucho porque les fue necesario para medir sus tierras, para las ajustar y partir entre ellos, mas esto fue materialmente, no por altura de grados ni por otra cuenta especulativa, sino por sus cordeles y piedrecitas, por las cuales hacen sus cuentas y particiones, que, por no atreverme a darme a entender, dejaré de decir lo que supe de ellas. De la Geografia supieron bien para pintar y hacer cada nación el modelo y dibujo de sus pueblos y provincias, que era lo que habían visto; no se metían en las ajenas: era extremo lo que en este particular hacían. Yo vi el modelo del Cozco y parte de su comarca con sus cuatro caminos principales, hecho de barro y piedrezuelas y palillos, trazado por su cuenta y medida, con sus plazas chicas y grandes, con todas sus calles anchas y angostas, con sus barrios y casas, hasta las muy olvidadas, con los tres arroyos que por ella corren, que era admiración mirarlo. Lo mismo era ver el campo con sus cerros altos y bajos, llanos y quebradas, ríos y arroyos, con sus vueltas y revueltas, que el mejor cosmógrafo del mundo no lo pudiera poner mejor. Hicieron este modelo para que lo viera un visitador que se llamaba Damián de la Vandera, que traía comisión de la Chancillería de los Reyes para saber cuántos pueblos y cuántos indios había en el distrito del Cozco; otros visitadores fueron a otras partes del reino a lo mismo. El modelo que digo que vi se hizo en Muyna, que los españoles llaman Mohina, cinco leguas al sur de la ciudad del Cozco; yo me halle alli porque en aquella visita se visitaron parte de los pueblos e indios del repartimiento de Garcilaso de la Vega, mi señor.

De la Aritmética supieron mucho y por admirable manera, que por nudos dados en unos hilos de diversos colores daban cuenta de todo lo que en el reino del Inca había de tributos y contribuciones por cargo y descargo; sumaban, restaban y multiplicaban por aquellos nudos, y, para saber lo que cabía a cada pueblo, hacían las particiones con granos de maíz y piedrezuelas, de manera que les salía cierta su cuenta. Y como para cada cosa de paz o de guerra, de vasallos, de tributos, ganados, leyes, ceremonias y todo lo demás de que se daba cuenta, tuviesen contadores de por sí y éstos estudiasen en sus ministerios y en sus cuentas, las daban con facilidad, porque la cuenta de cada cosa de aquéllas estaba en hilos y madejas de por sí…”.

**Los comentarios reales. Libro II. P. 136. Inca Garcilaso de la Vega.(1609).**

# LOS NÚMEROS Y LOS COMENTARIOS REALES

En los capítulos VIII se describe el uso de los quipus como material de registro que por sus nudos y colores tenían un significado desde ordenar a las personas por su edad hasta ordenar los alimentos y armas. Líneas más abajo se describe la forma de estructurar las cantidades en su sistema de base: los nudos de los quipus estaban en el orden de unidad, decena, centena, milla, decena de millar. Se aclara líneas abajo, que si bien en sus cuentas no llegaban a pasar la centena de millar en sus cuentas prácticas, el sistema que tenían de permitía contar números mayores. La información de ordenar los números en un sistema de base 10, coincide con la forma como se utilizan los números en las citas del documento "Los manuscritos de Huarochirí", coincide también con las citas del documento "Nueva crónica y buen gobierno" donde se describe como cuentas los números: 1, 2, 3...10, 20, 30, 100, 1 000, 10 000.

En "Nueva crónica y buen gobierno" se utiliza por Don Huamán Poma de Ayala la palabras numerar y contar con diferentes usos, líneas abajo, se describe como cuentan los números: 1, 2, 3...10, 20, 30, 100, 1 000, 10 000 observándose la secuencia. En el mismo párrafo se describe que cuentan en tablas y numeran de 100 000, 10 000, 100, 10 , 1. Se interpreta que numerar hace referencia a la estructura para contar (sistema de base o numeración). Que no hayan considerado al 1000 en su sistema general de numeración, parece a simple inspección un descuido, sin embargo esta información es muy importante para comprender la estructura de la yupana matriz o del dibujo de la yupana de Don Huamán Poma de Ayala. Si lo vemos desde nuestro sistema de base 10 que tiene órdenes de unidad, decena, centena, millar, decena de millar, centena de millar, millón, etc; parecería que reforzar la idea de un descuido. Sin embargo es diferente contar que numerar, el significado que se le da en la obra. Contar está relacionado a la ordinalidad, cardinalidad; numerar está relacionado con el sistema base que utilizan. Ahora es importante reflexionar que existen dentro del sistema base 10, muchos tipos, variantes de este sistema. Los términos utilizados en esta época, no necesariamente coinciden con los utilizados en pedagogía, sin embargo con el contexto y precisión en que son citados, se comprende el uso que le daban. Más importante aún, no hay contradicción cuando en el documento "Los comentarios reales" se describe como contaban y sobre su registro. Podría deducirse hasta aquí que por un lado, el quipu al ser un material de registro, su registraba 1, 10, 100, 1 000, 1 0 000, 100 000; en cambio en las yupanas al ser un material de cálculo se numeraba (estructuraba los grupos) de 1, 10, 100, 10 000, 100 000. El número mil no se encontraba dentro de el orden de numeración. Por lo que este sistema de base 10, no podemos entenderlo como el sistema base 10 actual; más bien tiene elementos diferentes, cualidades que reflejan el modo de pensar y actuar de la sociedad pre colombina. En la yupana matriz abordaremos con detalle la interpretación de esta información para describir cómo era su sistema de base 10.

# LOS NÚMEROS Y LOS COMENTARIOS REALES

Por otro lado en los párrafos citados del capítulo XVI de “Los comentarios reales”, se describe como los quipus tenían la utilidad de que daban cuenta de cada cosa que había en el reino del inca en sus hilos. Los quipus al ser un material vinculador de las sociedades a través de los tributos, narraciones (en esta investigación se explora lo relacionado a los números) y si bien los registros se cerraban anualmente, era un material muy dinámico ya que al conservar información, permitía con esta información poder operar. Por ejemplo el Inca Garcilaso de la Vega, describe que con los que daba cuenta de los quipus (registros), en al caso de las contribuciones, estos datos se sumaban , restaban, multiplicaban por aquellos nudos.

En los quipus por la estructura de sus nudos e hilos que iban parejos unos con otros, se podía sumar por órdenes, sin embargo su función principal era el registro de los números. Aunque el Inca Garcilaso de la Vega no hace referencia a la yupana, lo que sí se indica que con la información de los quipus se podía operar. Esto se interpreta, por el investigador como un camino bidireccional: se opera en la yupana, se registra en el quipu, son toda la información acumulada en los quipus se puede volver a operar con la yupana (sumar, restar, multiplicar) para registrar los datos finales en los quipus.

El tipo de sistema de base 10 que hayan utilizado, el proceso que siguieron desde descubrir el número hasta la construcción de este sistema y su ordenación y relación con los quipus, es lo que veremos en el siguiente capítulo. Donde el investigador, quien es pedagogo, a partir de los datos recopilados, dará una interpretación que sea fiel a la descripción de los documentos citados; y que sea consistente en las ideas lógico matemáticas.

Esta interpretación, no se debe entender como producto de una sola civilización y de un solo tiempo; si no como un proceso continuo, hasta el encuentro de las civilizaciones inca y española.

Los documentos “Manuscritos de huarochirí”, “Nueva crónica y buen gobierno” y “Los comentarios reales” donde cada uno de los autores nos comparte información valiosa, desde diversas perspectivas, nos acercan a comprender el proceso como el hombre de esos tiempos construyó el concepto del número, creo un sistema de numeración y como se demostrará en esta investigación: llegó a descubrir el cero.

# RELACIÓN DE LOS ELEMENTOS TANGIBLES E INTANGIBLES

| Elementos | Tangible | Intangible |
|---|---|---|
| Semilla | Cuando representa una semilla, un objeto. Cumple la función de material concreto | Cuando me permite comprender el número, las nociones lógicas que le anteceden. |
| Taptana | Sus cajas o cavidades, cuando permite representar un conjunto (cardinal). | Cuando es la base lógica y soporte para representar agrupaciones de a diez. |
| Yupana | El tablero de madera, arcilla o piedra para representar y las semillas. | Los conceptos de dimensión, cero, cardinales. |
| Quipu | Cuando es un cordel de animal o algodón. | Colores, tejidos , nudos que tienen un significado y estructura para registrar información. |

# MEMORIA DE LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Los elementos tangibles como las semillas, algodón, rocas crean la posibilidad de usarse y ser adaptadas como tecnología para convertirse las semillas en material manipulativo, las rocas en taptanas y yupanas, los algodones en quipus. Debe entenderse estos logros como proceso de la relación de muchas comunidades y que responde a las nuevas necesidades que se presentaron en ese entonces.

Los números desde “Los manuscritos de Huarochirí”, cumplen la función de cardinalidad, ordinalidad, nominalidad, y se presentan los grandes números en base diez.. En el documento “Nueva crónica y buen gobierno”, se describe con precisión sobre los nombres de los números, de la forma como contaban y de la estructura de su sistema de numeración en la yupana. Información que será muy importante para la presentación de la yupana matriz. En contraste con los manuscritos, encontramos más bien, puntos de coincidencia como el sistema de base diez. La información consignada por Huamán Poma de Ayala en “Nueva crónica y buen gobierno”, nos hace pensar, respecto al sistema de base diez, que es un tipo de sistema diferente al que usamos en la actualidad.

En el documento “Los comentarios reales” del Inca Garcilaso de la Vega, se describe los órdenes y forma de contar en los quipus. Se describen las cualidades de estos y como a través del tipo de cuerda, color , nudos y nudos especiales la información es registrada.

Las matemáticas permiten al Tawantinsuyo o a las comunidades de Huarochirí organizarse, registrar sus cosechas, armas, censar a su población. Su función está relacionada a controlar el medio y ordenar a la sociedad.

En el 2023, en Perú, tenemos un sistema de educación que parte de la educación básica hasta la superior, con un enfoque en desarrollar competencias para la ciudadanía y el trabajo en la sociedad. Hay algunas preguntas que surgen a medida que avanzamos en esta investigación de tipo exploratoria: ¿Cómo aprendían los niños? ¿Cuáles eran los aprendizajes que esperaba la comunidad de ellos?¿Habría posibilidad que aprendan matemáticas?¿Qué es lo que sabían sobre los números?

Ya que lo documentado, nos aproxima al saber de la comunidad, más no como el aprendizaje de un grupo de la sociedad en específico. Como pedagogo, los conceptos no aparecen por así en la mente humana, hace falta relacionarlos en el caso de las matemáticas, es necesario encontrar relaciones y patrones. Desde las ideas más básicas como la conservación de cantidad, noción de grupo, de secuencia, correspondencia, hasta el número, sistema de base, las operaciones; no es posible llegar a un conceptos complejo, sin haber comprendido un concepto básico.

# MEMORIA DE LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Respecto a los símbolos usados para representar los números, siguiendo el sistema de representación citado de Jerome Bruner y los tres momentos, en cada etapa se han utilizado diversos materiales para su registro. En el proceso enactivo que es un momento de abstracción empírica donde se necesita una representación más básica de la idea del número se han utilizado posiblemente semillas, piedrecitas y palos. En el proceso icónico, se han dibujado esas representaciones de los números de una manera fiel (en la misma cantidad) sobre cerámica, tejidos, piedra. También se pudo haber utilizado la taptana ya que tiene el potencial para relacionar los cardinales de los conjuntos que es un paso muy importante para estructurar el sistema de base. Mientras que en una etapa simbólica, de mayor abstracción se ha utilizado la yupana y el quipu como material para representar y operar ; y representar y registrar respectivamente.

Tanto en los procesos enactivo, icónico y simbólico se han utilizado, por ejemplo, la semillas; sin embargo, en el primer caso para representar objetos de forma discontinua, en el segundo caso como dibujo y en el tercer caso como un material manipulativo y en su mayor desarrollo la semilla alcanza la cualidad de la multirepresentación, esto solo es posible con la creación del cero y el sistema de dimensiones que se presenta en esta investigación a través de la yupana matriz.

Lo que continua, es una interpretación desde la pedagogía basada en los documentos y piezas arqueológicas que se alinean con los conocimientos que tenemos sobre como el ser humano construye sus conocimientos matemáticos. Para presentar la información algunas veces no bastará los conceptos que actualmente usamos en las matemáticas de base diez por lo que se propone nuevos conceptos, en el marco de esta interpretación, como dimensión, multirepresentación, memoria matemática entre otros.

Se utilizará la fenomenología y la hermenéutica para conceptualizar este fenómeno que es cómo construyeron sus conceptos matemáticos, cuáles fueron las fases o situaciones que atravesaron con la tecnología que usaron., cuál es el eslabón que nos permitirá comprender la relación entre los elementos tangibles e intangibles de esta investigación.

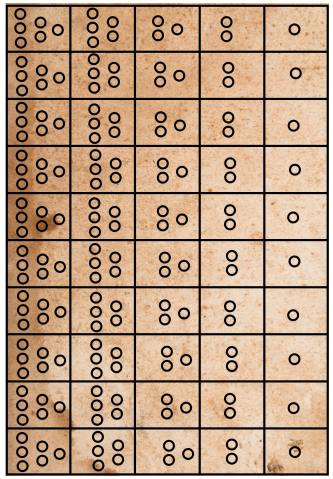
# CAPÍTULO IV

SOTO INKA: LA YUPANA HUAROCHIRANA

# SOTO INKA: LA YUPANA HUAROCHIRANA

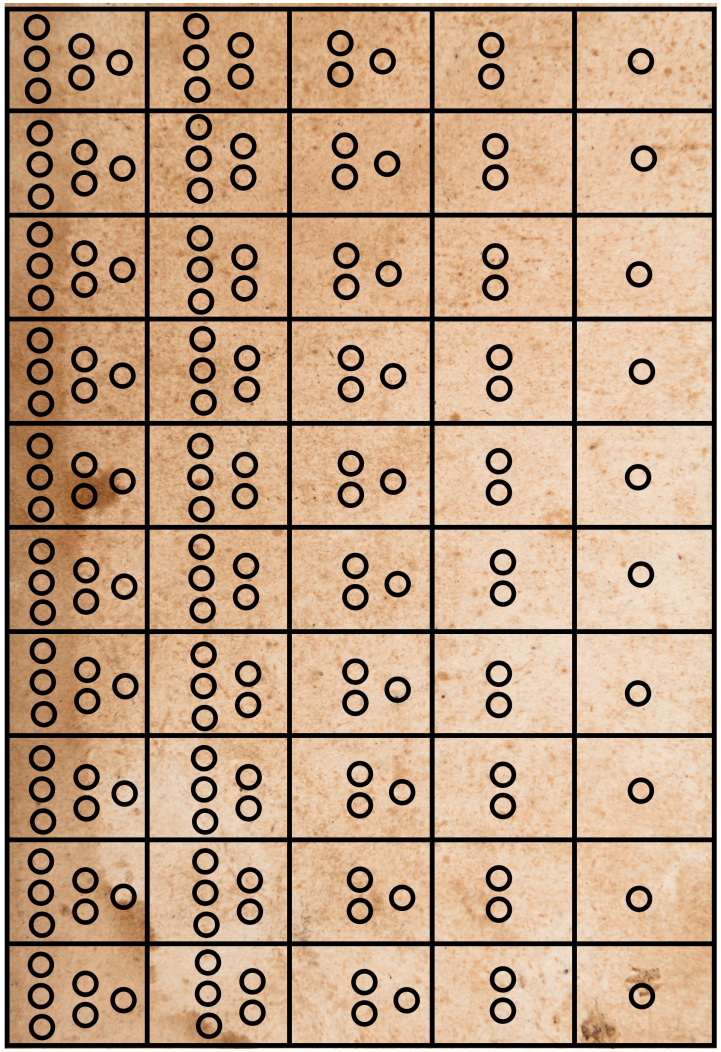
En el capítulo I describimos sobre la investigación y que uno de los objetivos específicos es proponer una yupana matriz con fines pedagógicos, basándose en la información documental y otros elementos intangibles así como en los elementos tangibles que han quedado de rastro. En el capítulo II, describimos las bases teóricas para entender el fundamento y relaciones encontradas desde una perspectiva pedagógica en esta investigación. En el capítulo III, describimos el documento con el que comenzó esta investigación que son los "Manuscritos de Huarochirí", que posteriormente la información fue comparada con la que se encuentra en los documentos "Nueva Crónica y Buen Gobierno" y "Los Comentarios Reales" de Don Huamán Poma de Ayala y el Inca Garcilaso dela Vega, respectivamente. Esta investigación ordena los elementos encontrados en los elementos tangibles e intangibles para proponer una ruta, que es una interpretación, por ser una investigación de nivel exploratoria cómo nuestros ancestros construyeron el número, cómo construyeron su sistema de base diez, qué tipo de sistema de base diez utilizaron, cómo operaban y registraban sus números. Como primer punto, el investigador propone, una yupana matriz llamada Soto Inka, Yupana Huarochirana que sea el eslabón para entender el funcionamiento de las yupanas existentes y demás elementos tangibles e intangibles de las matemáticas ancestrales. Como segundo punto demostrar como nuestros ancestros utilizaban el cero y cómo esta tecnología les facilitó las operaciones.

Como tercer y último punto interpretar la yupana que se encuentra en el dibujo de Don Huamán Poma y Ayala en su obra "Nueva crónica y buen gobierno".



**Yupana matriz. Autor Juan Carlos Soto Fernández. (2023).**

# DESCRIPCIÓN

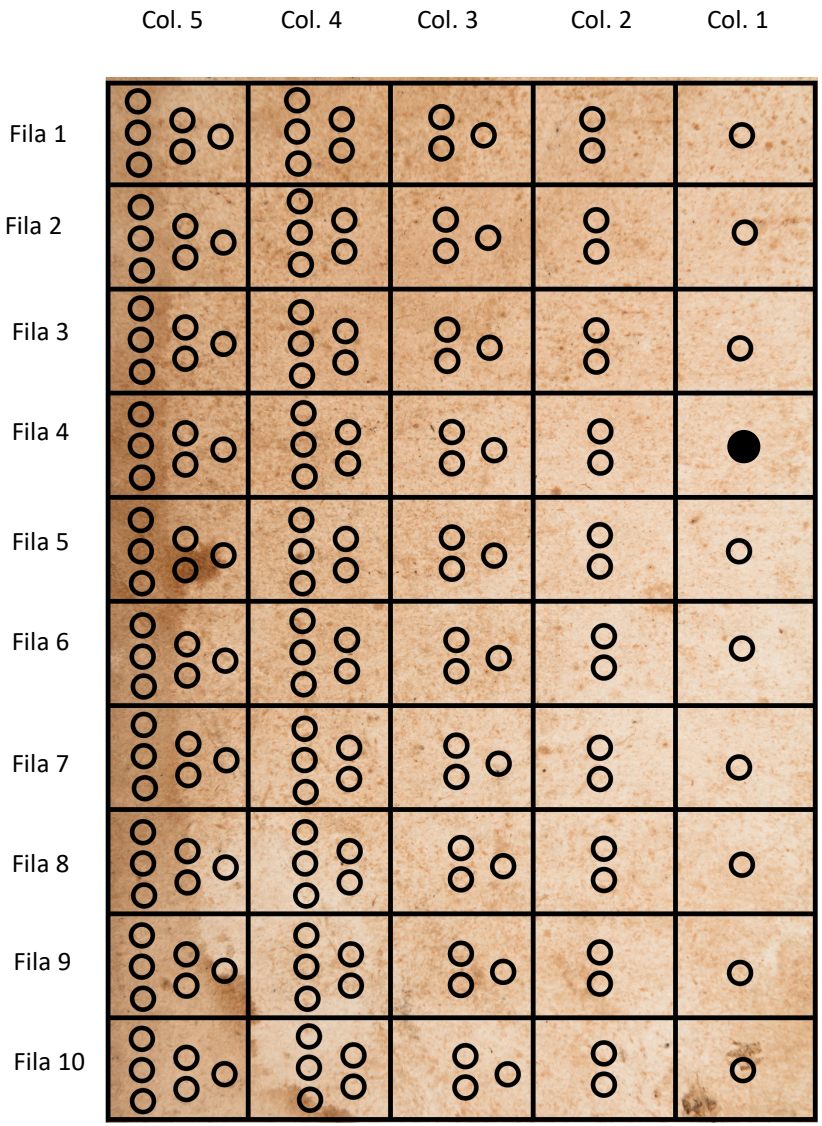


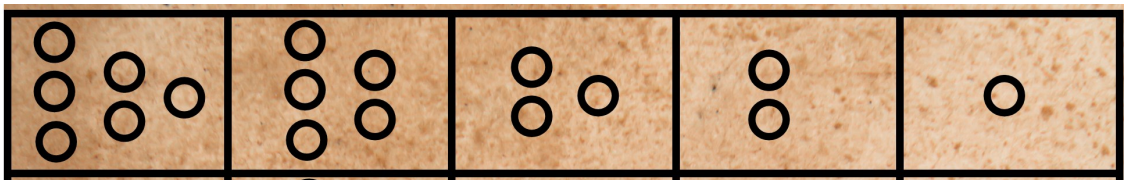
Es una yupana de diez filas por cinco columnas. Que sugiere estar pintada o graficada sobre madera. En cada columna aparecen respectivamente un círculo, dos círculos, tres círculos, cinco círculos, seis círculos. Cada círculo en la yupana representa un cero, es decir, es el símbolo del cero (sea círculo o cavidad). Esto quiere decir que no representa de manera superficial algo vacío o la nada , si no representa el significado del cero y el potencial que implica.

En cada circulo se puede representar solo una vez una semilla. Cada semilla, de acuerdo al lugar donde se ubique, indicará el concepto de unidad o decena, pero también puede indicar el cardinal de tres o cien o un millón. Es decir el valor que adquiera una semilla dependerá del lugar donde se ubique en las filas y las columnas con relación al cero. El valor de cada semilla, dependerá entonces del lugar y dimensión donde se encuentre. Es un sistema de base 10, sin embargo tiene características y relaciones en su representación y operatividad que hace falta conceptualizar nuevos nombres como: dimensión para comprenderlo eficazmente.

El sistema permite la multirepresentatividad de cada número y sugiere modos sofisticados de hacerlo. Cada círculo significa un cero, lo que sugiere ser un tablero matriz sin precedentes en forma de fractal, panal de abejas. A cada columna le llamaremos dimensión y no orden para poder comprender el funcionamiento de esta estructura de base 10. En relación al modelo de yupana que aparece en “Nueva crónica y buen gobierno” , la yupana matriz tiene 5 filas más y una columna más, esto se explicará a detalle en las siguientes páginas.

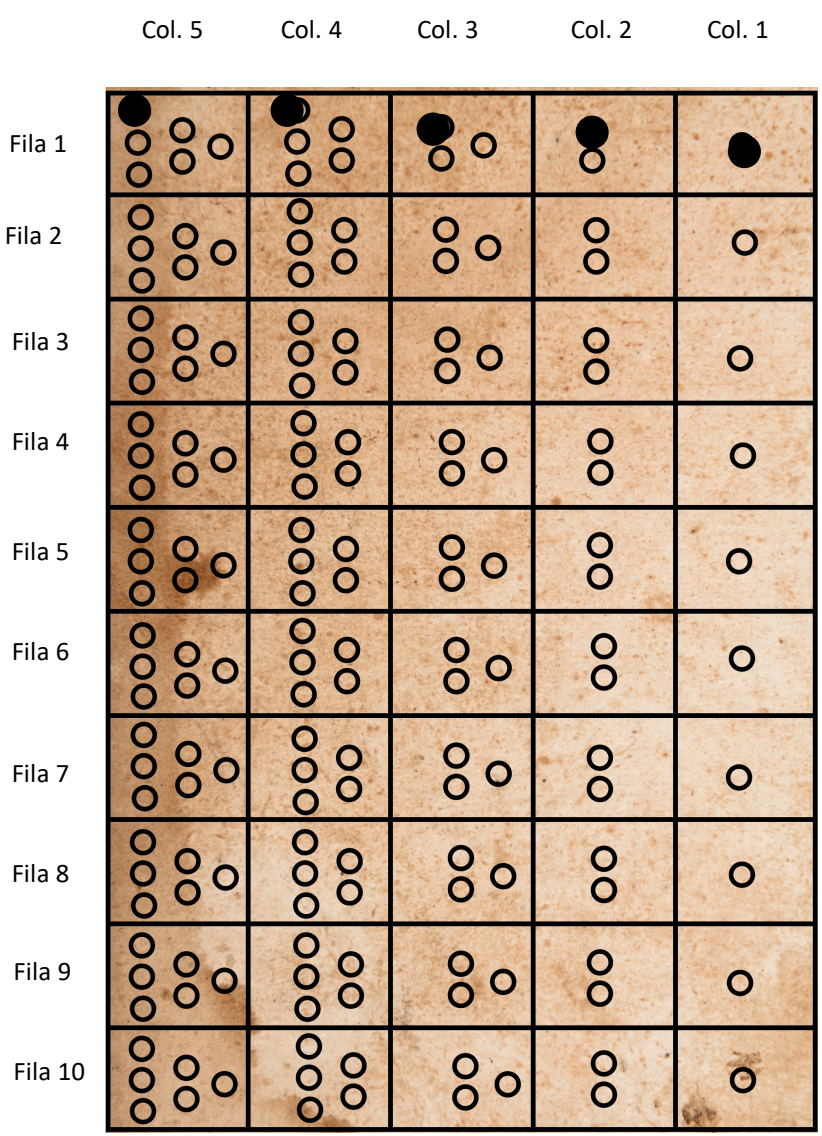
# REPRESENTACIÓN DEL NÚMERO EN LAS DIMENSIONES

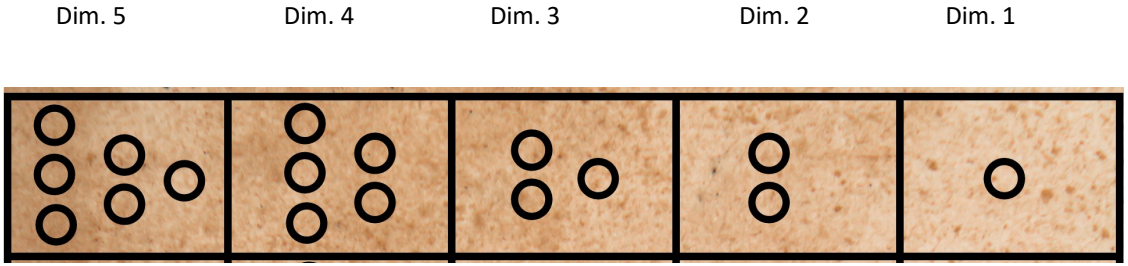


La dimensión es un concepto que sugiere contener y organizar a los órdenes que están antes que este. No es un concepto que se pueda explicar como órdenes (unidad, decena ,etc) o como una columna. Por ejemplo en la figura una semilla, se encuentra en la primera columna y en la cuarta fila y representa el cardinal de cuatro. Esta semilla se encuentra en la primera dimensión. Si seguimos bajando la semilla representará el 5, luego el 6 hasta el 9, por ejemplo. Si continuamos bajando un espacio más, la semilla se encontrará en la columna 1 y en la fila 10, esto significa que representa el cardinal de 10 o una decena y se encuentra en la primera dimensión. Esto no sería posible en nuestro sistema de base 10 explicado en órdenes de unidades y decenas. La primera dimensión siempre estará representada por el primer cero (círculo) en la estructura de la yupana. En esta misma línea, cuando se desea representar el diez, también se puede representar en la segunda dimensión (compuesta por dos ceros), la semilla que es el grupo de diez se colocará arriba en el primer círculo y el segundo círculo vació representará en la segunda columna a la primera dimensión. Entonces, en la segunda columna se encuentra la segunda y la primera dimensión representadas. Esto permite, por ejemplo que el cuatro que representamos en el tablero con una semilla, se corra una posición hacia la izquierda (columna 2, fila 4) en la posición de la dimensión  1 que le corresponde y seguir siendo cuatro.

# DIMENSIONES




Así, cada columna se describe como una dimensión, que a la vez incluye a las otras dimensiones. El concepto de órdenes como lo conocemos (unidad, decena, centena, millar, decena de millas, centena de millar, millón), nos sirve para entender como se agrupan las unidades para el conteo, pero no como se enumeran, es decir, estructuran dentro de este sistema de base 10. Por ejemplo, vamos a representar una unidad en cada dimensión en la imagen:

Columna 1, fila 1: uno

Columna 2, fila 1: diez

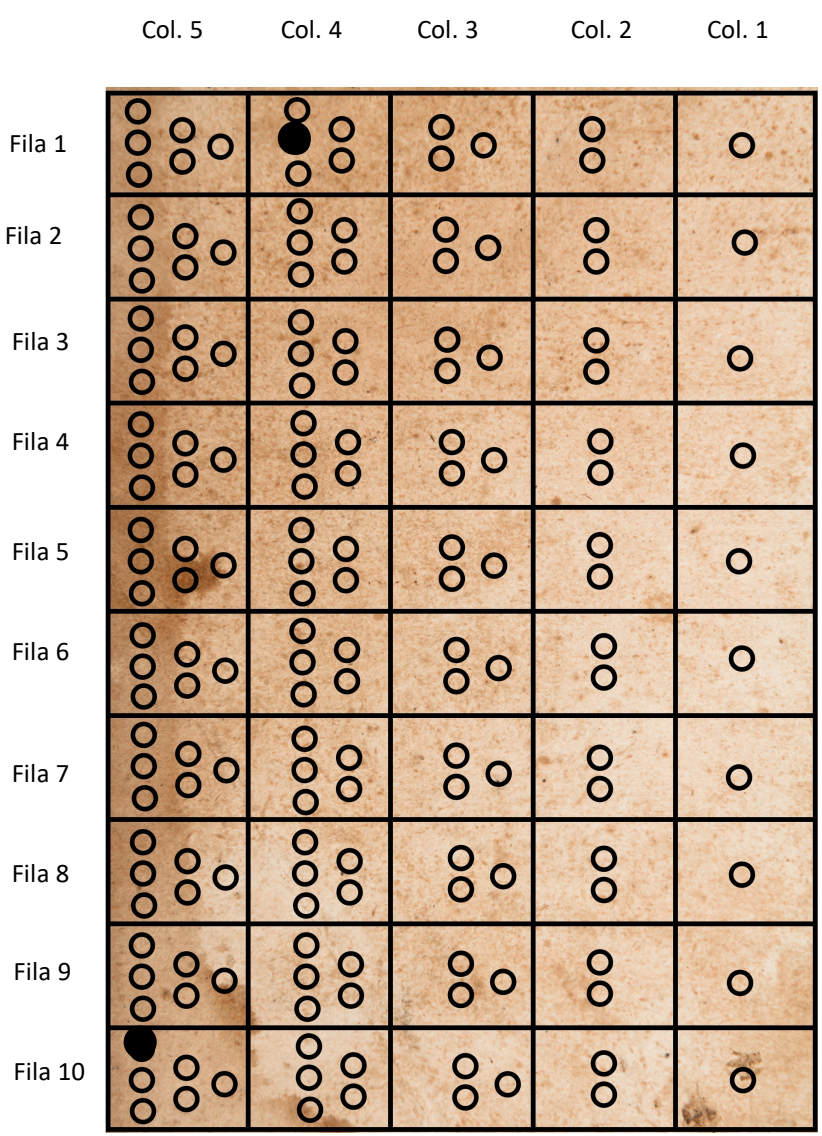
Columna 3, fila 1: cien

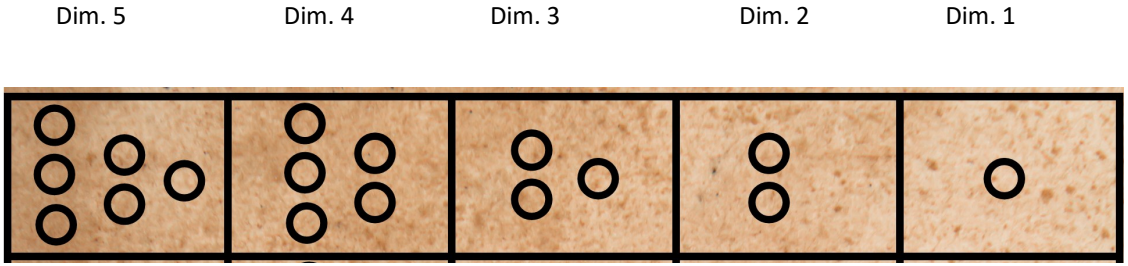
Columna 4, fila 1: diez mil

Columna 5, fila 1: cien mil

Esta forma de enumerar, de ordenar el sistema de la yupana, coincide con las descripciones en “Nueva crónica y buen gobierno” de Don Huamán Poma de Ayala, donde se puede contar el mil y operarlo, sin embargo, no forma parte de su sistema estructural.

# DIMENSIONES




En la siguiente imagen se representan los números mil y un millón.

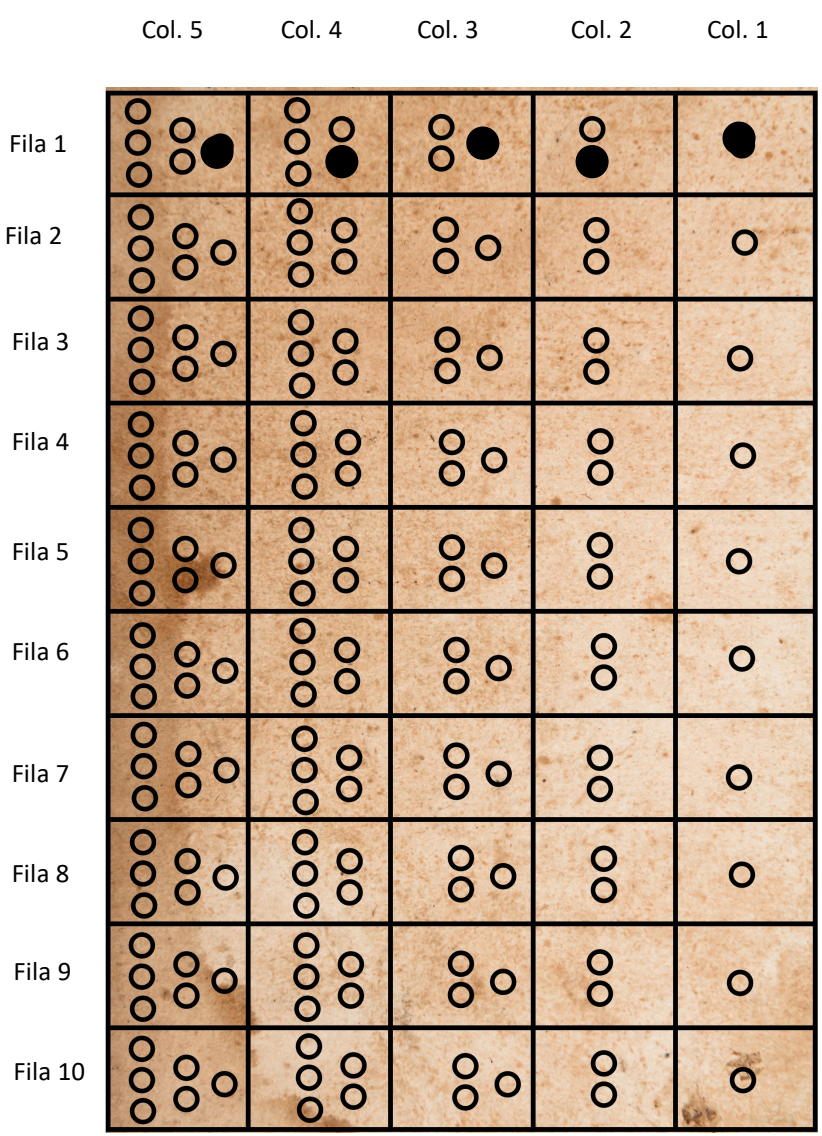
Columna 4, fila 1: mil

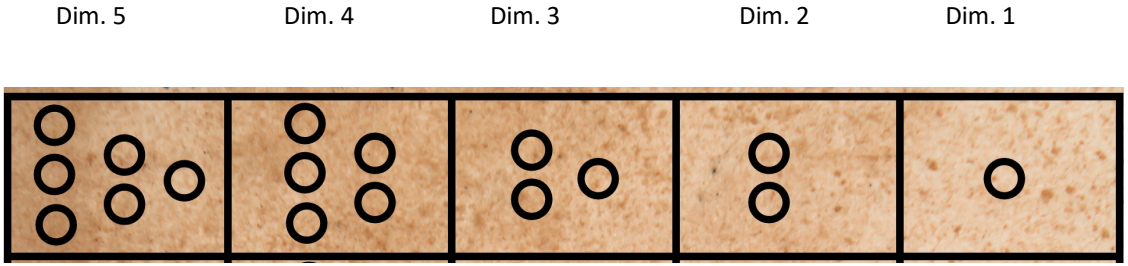
Columna 5, fila 10: un millón

Como vemos no hay problemas en su representación, tampoco como veremos en su operacionalización, pero no forman parte de su estructura fundamental de organización de los números.

Como vemos, la semilla y su posición cumplen un rol importante en indicarnos el valor de una cantidad. Esto solo es posible con el conocimiento y representación del cero y el potencial que tiene para modificar a los demás números.

# DIMENSIONES




Este sistema de base 10 en estructura de dimensiones, nos permite representar como se ve en la imagen el número 1 en diferentes lugares. Esto es posible, porque existe el concepto del cero y en la dimensión 1, fila 1, columna 1, indica que puede haber una semilla que tenga el valor de una unidad. Lo mismo en la fila 1, columna 2, hay una unidad que se encuentra dentro de la dimensión 2, pero es de la dimensión 1.

Columna 1, fila 1, dimensión 1: uno

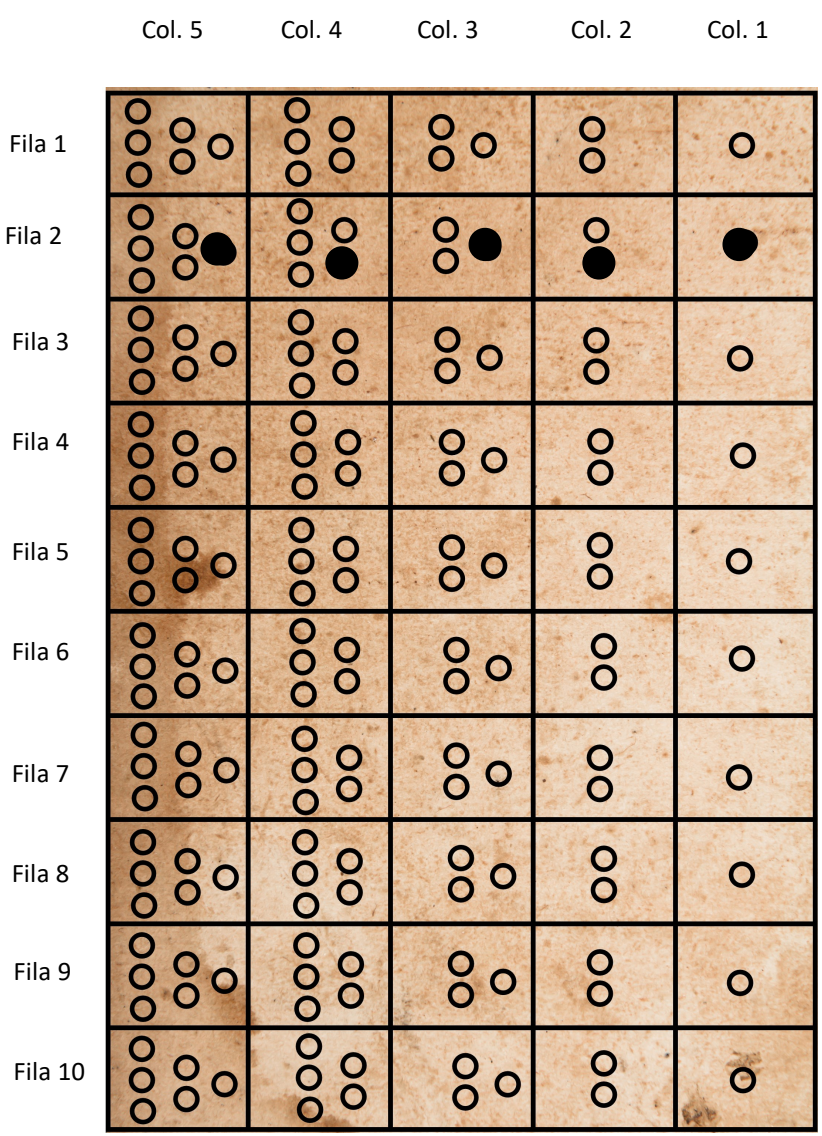
Columna 2, fila 1, dimensión 1 (dentro de la dimensión 2): uno

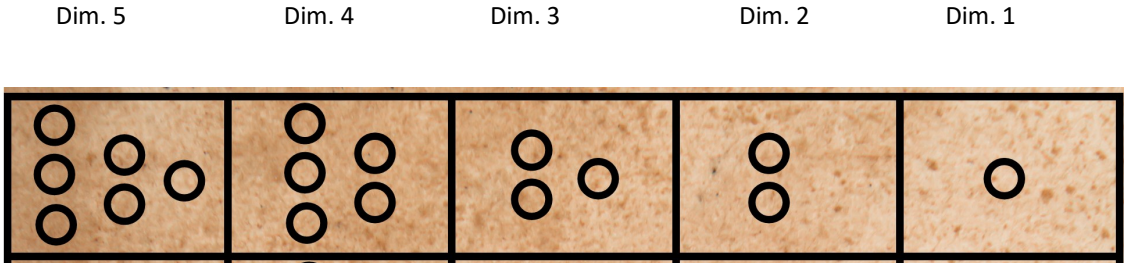
Columna 3, fila 1, dimensión 1 (dentro de la dimensión 3): uno

Columna 4, fila 1, dimensión 1(dentro de la dimensión 4): uno

Columna 5, fila 1, dimensión 1(dentro de la dimensión 5): uno

# DIMENSIONES




En esta misma estructura podemos representar el cardinal 2, de la siguiente manera:

Columna 1, fila 2, dimensión 1: dos

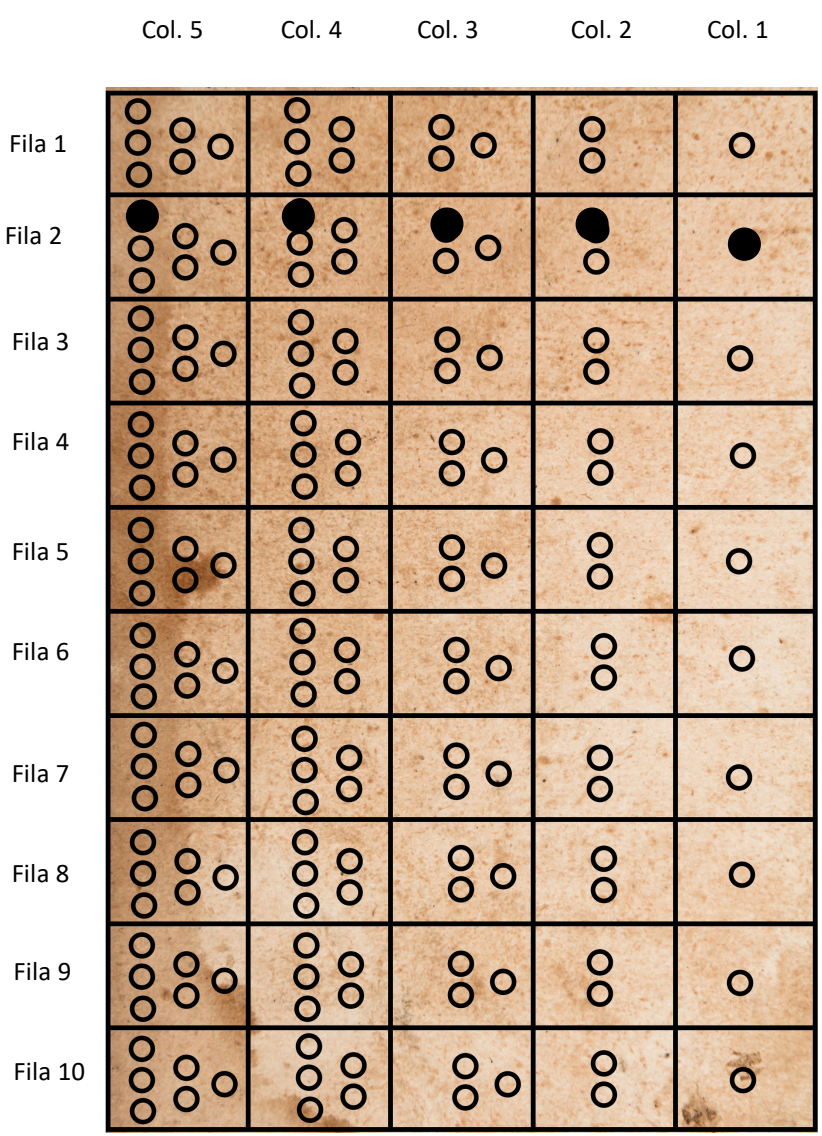
Columna 2, fila 2, dimensión 1 (dentro de la dimensión 2): dos

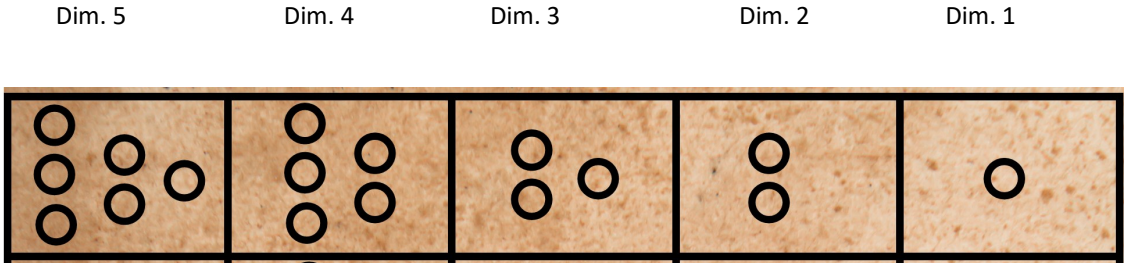
Columna 3, fila 2, dimensión 1 (dentro de la dimensión 3): dos

Columna 4, fila 2, dimensión 1(dentro de la dimensión 4): dos

Columna 5, fila 2, dimensión 1(dentro de la dimensión 5): dos

# DIMENSIONES




En esta misma estructura, representamos los siguientes números:

Columna 1, fila 2: dos

Columna 2, fila 2: veinte

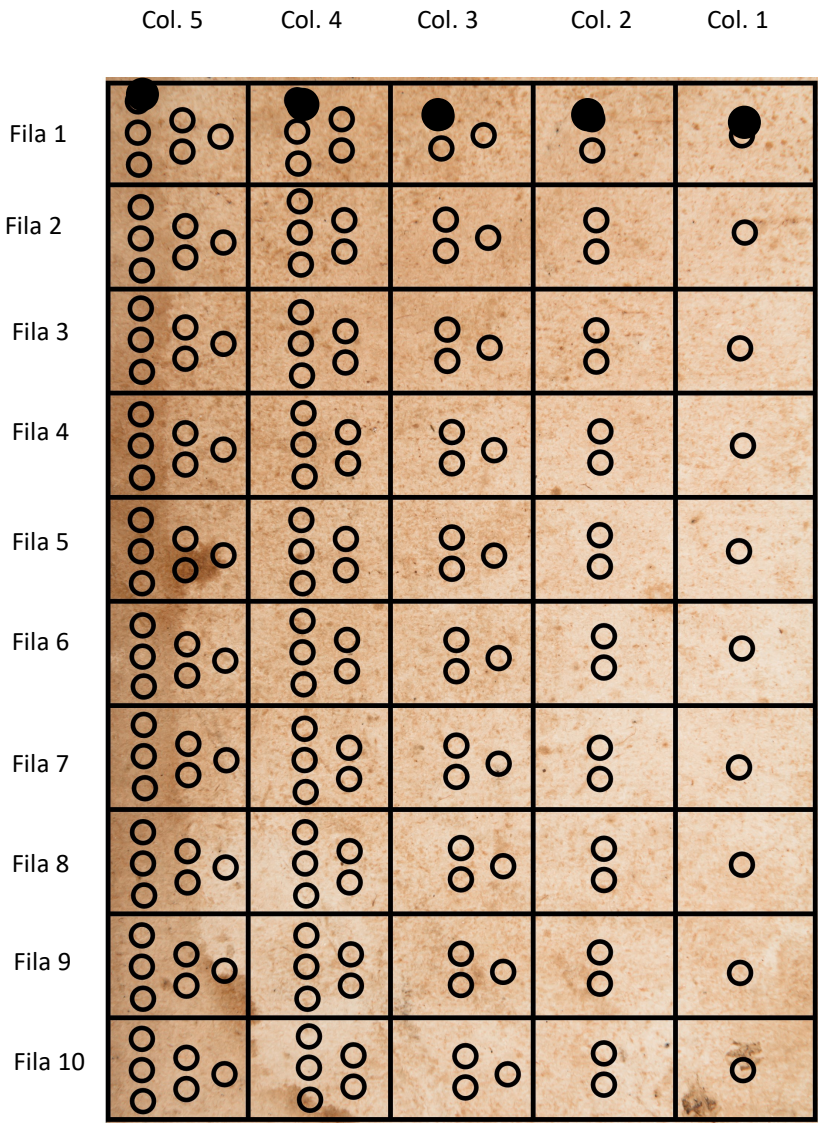
Columna 3, fila 2: doscientos

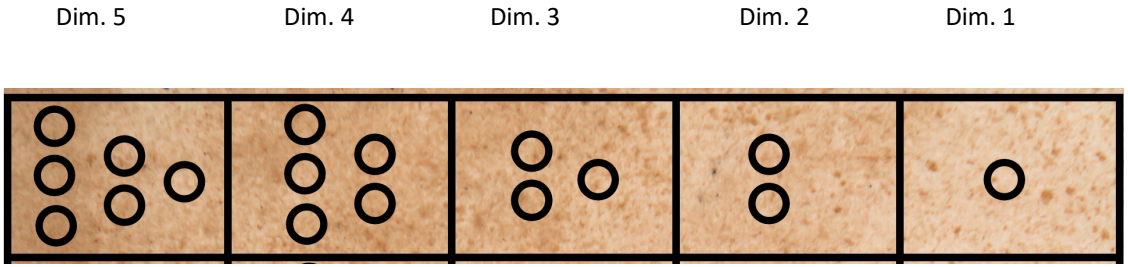
Columna 4, fila 2: veinte mil

Columna 5, fila 2: doscientos mil

En “Los manuscritos de Huarochirí” se utiliza en la narraciones la expresión “miles de hombres…” en los documentos “Nueva crónica y buen gobierno” se describe una estructura hasta cien mil, y en el documento “Los comentarios reales”, se describe que si bien las cuentan prácticas no superaban los cien mil, los contadores con sus habilidades, tenían el potencial de contar números mayores. En esta estructura de dimensiones, sugiere una concepción incluyente o de pertenencia, posiblemente relacionado con la parcialidad o ayllu. Algunos teóricos sugieren que los círculos de las columnas sugieren una sucesión Fibonacci,1, 2, 3, 5, por lo que, en esa lógica, debería continuar una columna con 8 círculos. En esta investigación proponemos que continúa una columna con seis círculos, lo cual explicaremos a continuación.

# DIMENSIONES

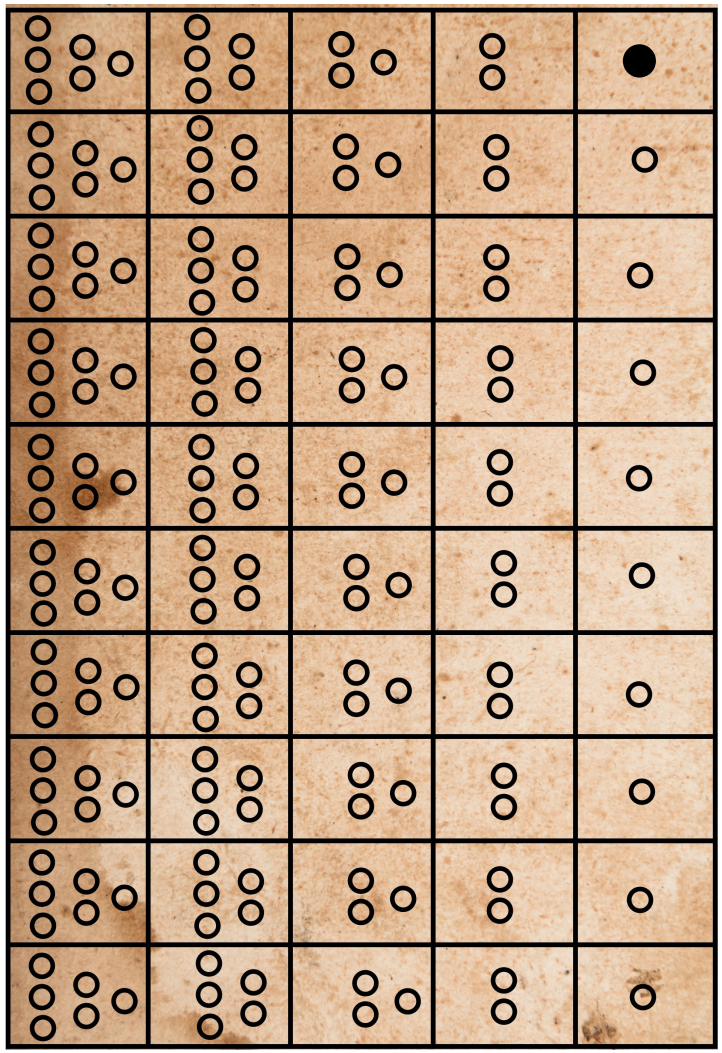



En la yupana matriz , propuesta en esta investigación, se le agrega una quinta columna con seis círculos, esto es por que en la documentación citada, como “Nueva crónica y buen gobierno”, se describe que se numeraba (estructuraba los grupos) de 1, 10, 100, 10 000, 100 000. En esta lógica y considerando que los círculos de los dibujos con ceros: en la primera fila de la cuarta columna se representa el 10 000, por lo tanto en la primera fila y quinta columna, le sigue el 100 000, esto es no por el orden de sucesión de órdenes (como en el caso del 1000), si no por que el registro documental informa que contaban en 100 000, por lo tanto le continúan 6 ceros y no 8 círculos, que vendrían a ser en la interpretación de una sucesión Fibonacci, donde el círculo no tiene el significado del cero y el potencial que ello implica.

# REPRESENTACIÓN DEL NÚMERO: 1

Figura A.



Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 1.

Obsérvese en la figura A que la semilla sigue siendo la misma, pero ha adquirido un nuevo valor en función del lugar que ocupe. Adquiere el valor de 1, esto significa que la semilla representa a uno más cero (1 + 0). La semilla representa el cardinal de 1 o un conjunto de 1.

En la yupana acabamos de representar con una semilla (ficha circular color negro) un lugar que era cero. Ahora ese lugar ocupa una semilla que se encuentra en el primer lugar . Aunque parece muy sencilla la forma como se representa, tiene las siguientes posiciones:

Se encuentra en la primera fila, en la columna 1.

Los números que le continúan se cuentan hacia abajo.

Se podría colocar el tablero en forma horizontal y contar desde abajo hacia arriba y no cambiaría la estructura del sistema.

Solo se utilizarán un color de semilla para representar a los números.

La semilla, en este esquema no es un material concreto, pero sí un material manipulativo. La número cumple la función de cardinalidad, adquiriendo este valor, de acuerdo al lugar que ocupe dentro del tablero.

# REPRESENTACIÓN DEL NÚMERO: 2

Figura A.

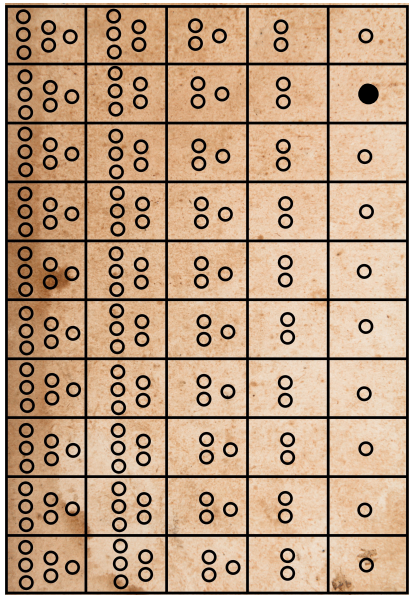
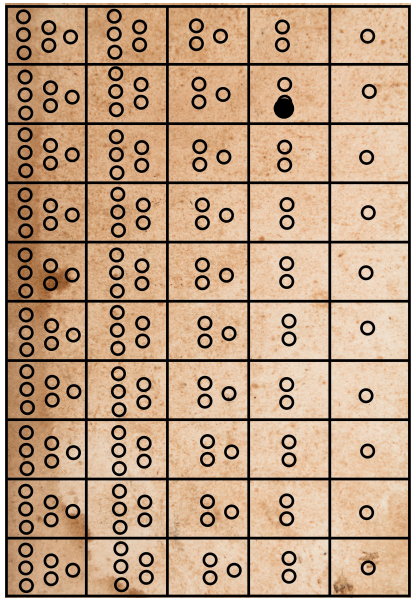


Figura B.



Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 2.

Obsérvese en la figura A que la semilla sigue siendo la misma, pero ha adquirido un nuevo valor en función del lugar que ocupe. Adquiere el valor de 2, esto significa que la semilla representa a dos unos (1 + 1). La semilla representa el cardinal de 2 o un conjunto de 2.

En la figura B. se representa también el número 2. Esta es otra cualidad de esta yupana, que se puede representar cada número de muchas formas. Más adelante detallaremos como es posible esto y cuales son las implicancias.

Solo se puede colocar una semilla, encima que ocupa el lugar del cero. Cada uno de los círculos que aparece en el tablero es un cero.

# REPRESENTACIÓN DEL NÚMERO:3

Figura A.

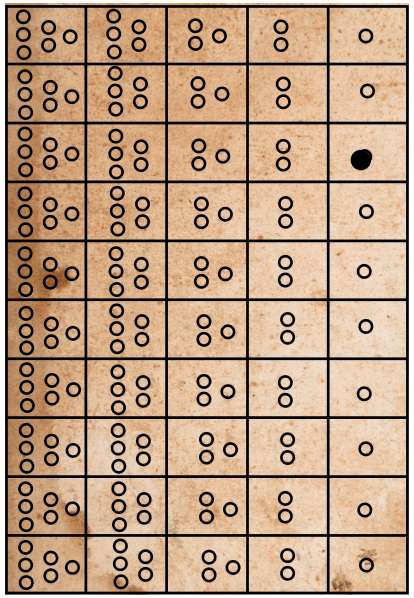


Figura B.

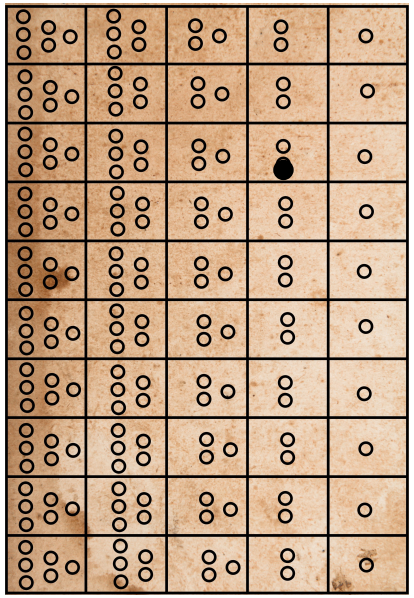


Figura C.

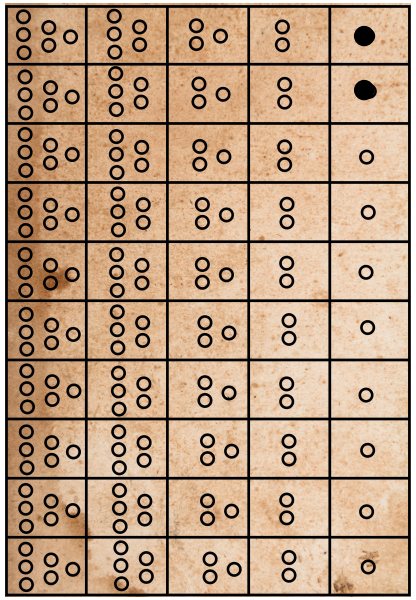
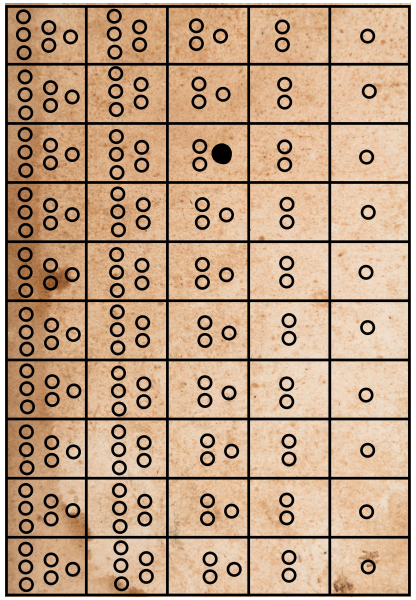


Figura D.



Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 3.

Obsérvese en la figura A que la semilla sigue siendo la misma, pero ha adquirido un nuevo valor en función del lugar que ocupe. Adquiere el valor de 3, esto significa que la semilla representa a tres unos (1 + 1 + 1). La semilla representa el cardinal de 3 o un conjunto de 3.

En la figura B. se representa también el número 3. Esta es otra cualidad de esta yupana, que se puede representar cada número de muchas formas. Más adelante detallaremos como es posible esto y cuales son las implicancias.

Solo se puede colocar una semilla, encima que ocupa el lugar del cero. Cada uno de los círculos que aparece en el tablero es un cero.

En las figuras C se representa el 3 como la suma de los cardinales: 1 y 2 (1 + 2), en la figura D. se representa el 3 en la tercera dimesión. Se puede representar el 3 de muchas formas en el tablero, Se buscará la forma más eficiente de representar para operar.

# REPRESENTACIÓN DEL NÚMERO: 4

Figura A.

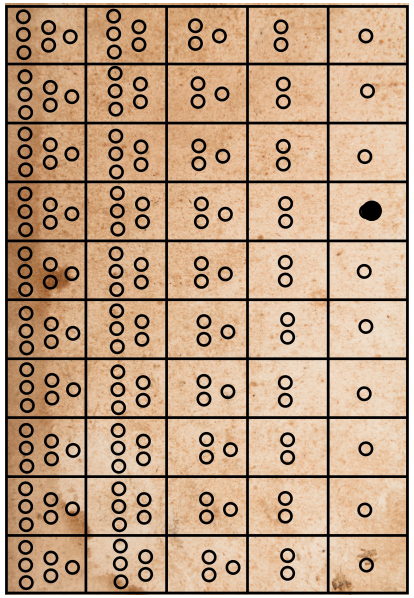
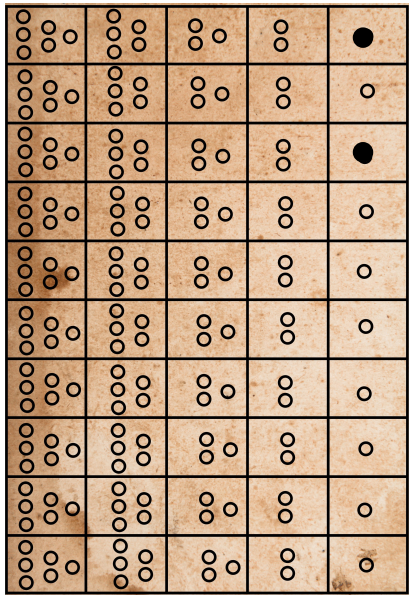
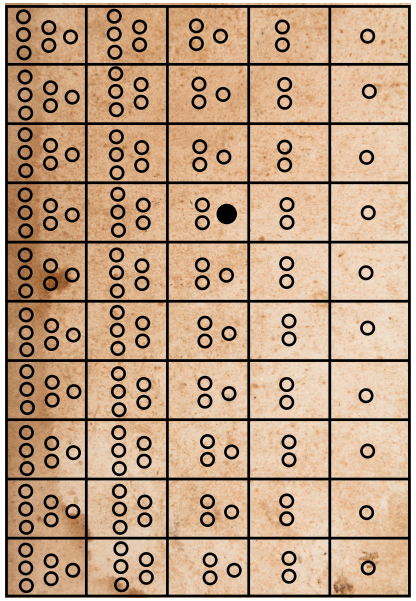
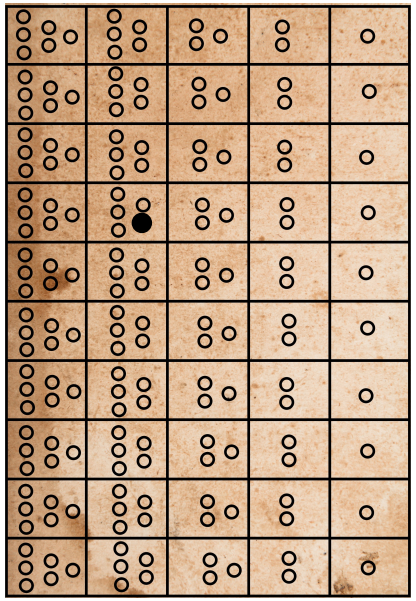


Figura B.







Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 4.

Obsérvese en la figura A que la semilla sigue siendo la misma, pero ha adquirido un nuevo valor en función del lugar que ocupe. Adquiere el valor de 4, esto significa que la semilla representa a cuatro unos (1 + 1 + 1+ 1). La semilla representa el cardinal de 4 o un conjunto de 4.

En la figura B. se representa también el número 4 como la suma de los cardinales 1 y 3 (3 + 1). Esta es otra cualidad de esta yupana, que se puede representar cada número de muchas formas. Más adelante detallaremos como es posible esto y cuales son las implicancias.

Solo se puede colocar una semilla, encima que ocupa el lugar del cero. Cada uno de los círculos que aparece en el tablero es un cero.

En las figuras C se representa el 4 en otra dimensión. Se puede representar el 4 de muchas formas en el tablero, Se buscará la forma más eficiente de representar para operar.

# REPRESENTACIÓN DEL NÚMERO: 5

Figura A.

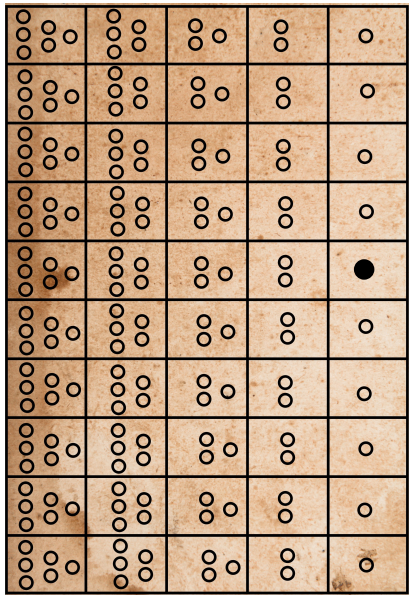
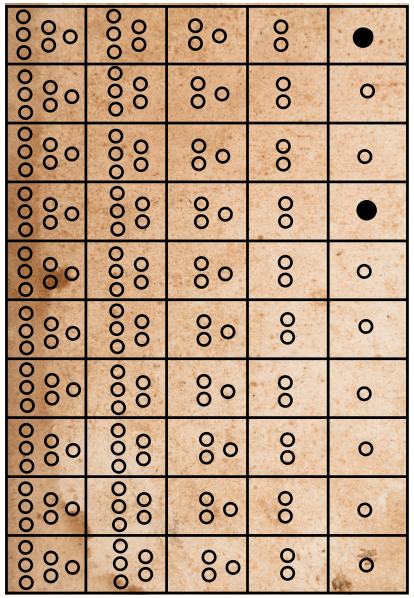
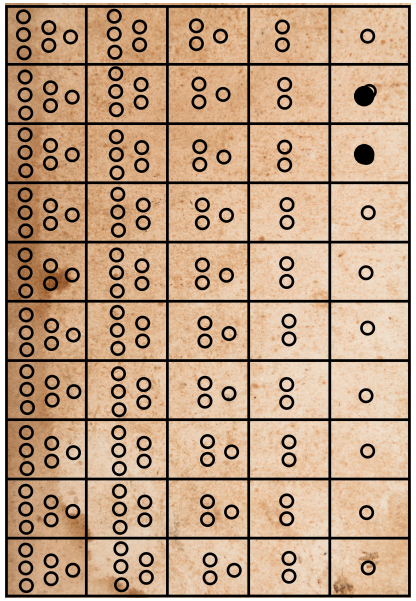
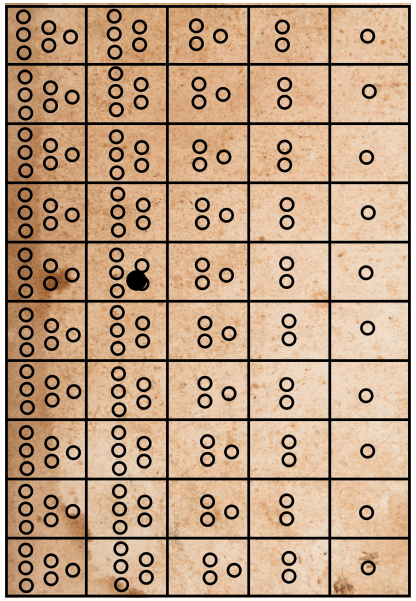


Figura B.







Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 5.

Obsérvese en la figura A que la semilla sigue siendo la misma, pero ha adquirido un nuevo valor en función del lugar que ocupe. Adquiere el valor de 5, esto significa que la semilla representa a cinco unos (1 + 1 + 1+ 1+1). La semilla representa el cardinal de 5 o un conjunto de 5.

En la figura B. se representa también el número 5 como la suma de los cardinales 1 y 4 (1 + 4). Esta es otra cualidad de esta yupana, que se puede representar cada número de muchas formas. Más adelante detallaremos como es posible esto y cuales son las implicancias.

Solo se puede colocar una semilla, encima que ocupa el lugar del cero. Cada uno de los círculos que aparece en el tablero es un cero.

En la figura C. se representa también el número 4 como la suma de los cardinales 2 y 3 (2 + 3).

En las figuras D se representa el 5 en otra dimensión. Se puede representar el 5 de muchas formas en el tablero, Se buscará la forma más eficiente de representar para operar.

# REPRESENTACIÓN DEL NÚMERO: 6

Figura A.

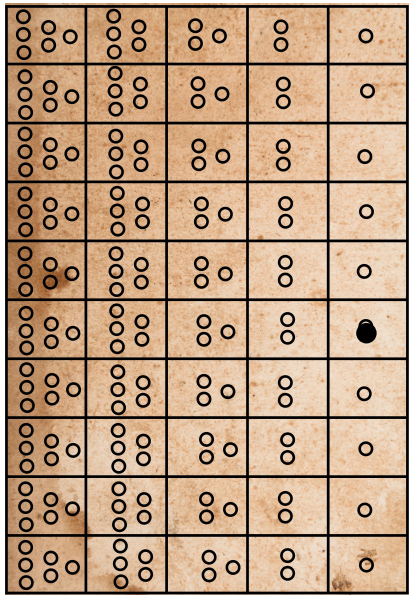
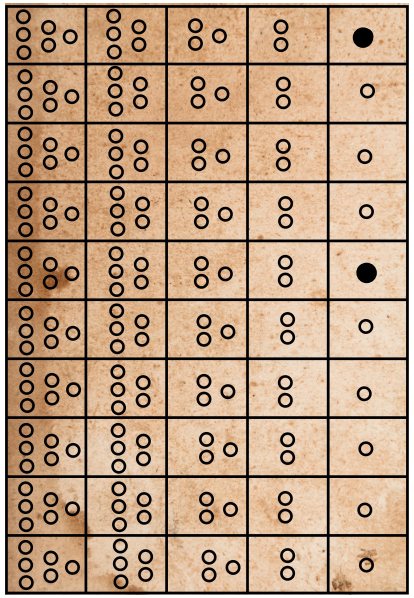
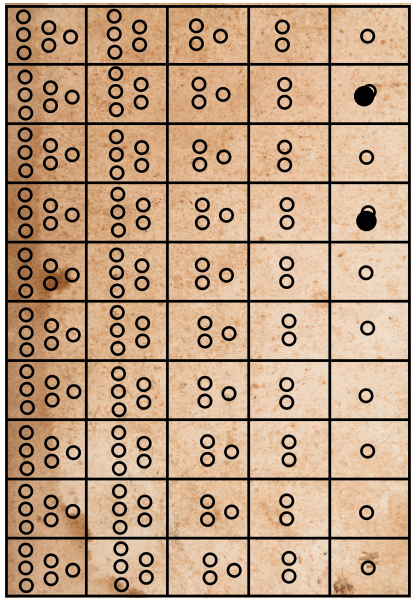
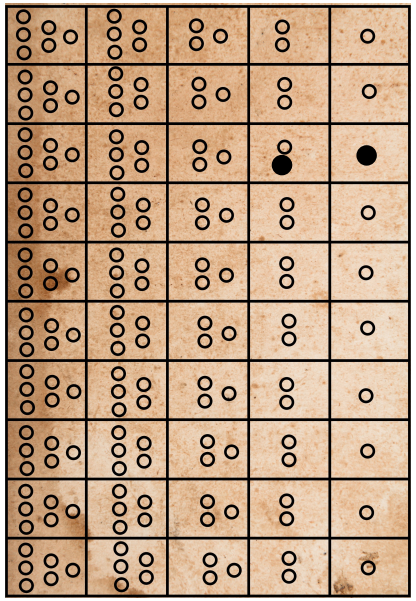


Figura B.







Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 6.

Obsérvese en la figura A que la semilla sigue siendo la misma, pero ha adquirido un nuevo valor en función del lugar que ocupe. Adquiere el valor de 6, esto significa que la semilla representa a seis unos (1 + 1 + 1+ 1+1+1). La semilla representa el cardinal de 6 o un conjunto de 6.

En la figura B. se representa también el número 6 como la suma de los cardinales 1 y 5 (1 + 5). Esta es otra cualidad de esta yupana, que se puede representar cada número de muchas formas. Más adelante detallaremos como es posible esto y cuales son las implicancias.

Solo se puede colocar una semilla, encima que ocupa el lugar del cero. Cada uno de los círculos que aparece en el tablero es un cero.

En la figura C. se representa también el número 6 como la suma de los cardinales 2 y 4 (2 + 4) y en la figura D. como un 3 +3.

Se puede representar de muchas formas más el 6 en la yupana. Se buscará la forma más eficiente de representar para operar.

# REPRESENTACIÓN DEL NÚMERO:7

Figura A.

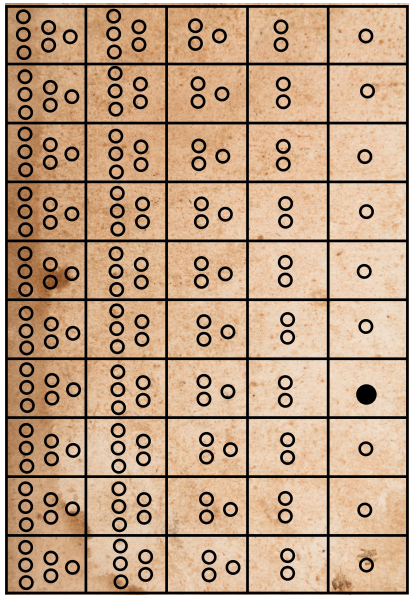
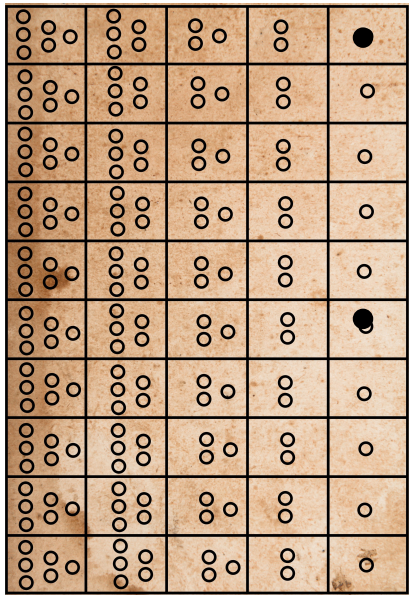
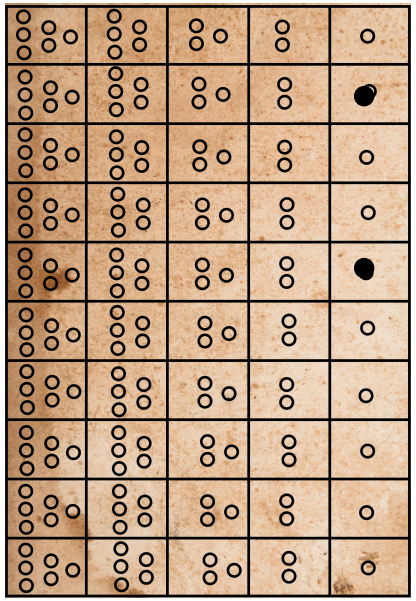
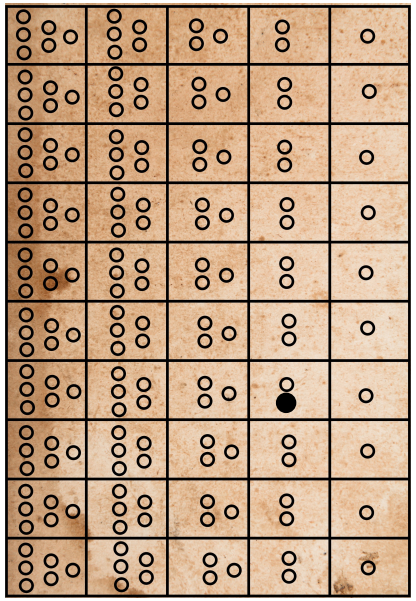


Figura B.







Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 7.

Obsérvese en la figura A que la semilla sigue siendo la misma, pero ha adquirido un nuevo valor en función del lugar que ocupe. Adquiere el valor de 7, esto significa que la semilla representa a siete unos (1 + 1 + 1+ 1+1+1+1). La semilla representa el cardinal de 7 o un conjunto de 7.

En la figura B. se representa también el número 7 como la suma de los cardinales 1 y 6 (1 + 6).

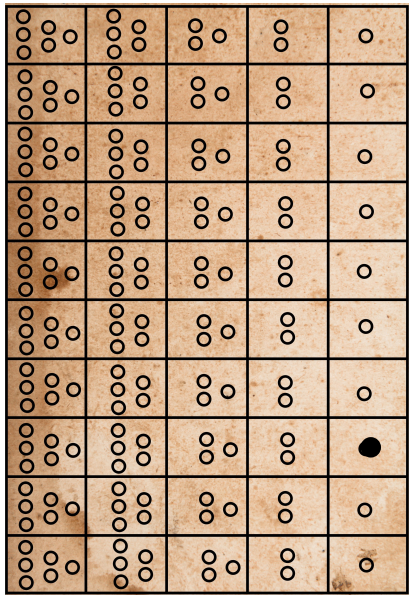
Solo se puede colocar una semilla, encima que ocupa el lugar del cero. Cada uno de los círculos que aparece en el tablero es un cero.

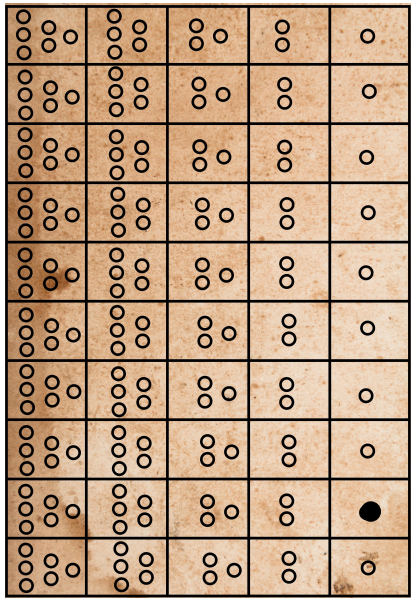
En la figura C. se representa también el número 7 como la suma de los cardinales 2 y 5 (2 + 5).

En la figura D. se representa el 7 en otra dimensión.

Se puede representar de muchas formas más el 7 en la yupana. Se buscará la forma más eficiente de representar para operar.

# REPRESENTACIÓN DEL NÚMERO: 8 y 9





Utilizando las semillas vamos a representar los números 8 y 9. Como vemos en las ilustraciones anteriores, se pueden representar los números de muchas maneras. Todas esas formas son correctas, se buscará la forma más eficiente de acuerdo a la relación de operaciones a ejecutar.

Hasta aquí, podemos hacer algunas precisiones respecto de la forma como estructura mentalmente el tablero. En este tablero no se puede hablar de órdenes estrictamente hablando, como las conocemos en nuestro tablero de base 10 occidental. A cada columna le vamos a llamar dimensión. Desde izquierda derecha podemos ver que hay cinco dimensiones y se pueden agregar más. Por otro lado cada dimensión desde la primera, se encuentra contenida en la siguiente y la siguiente contiene a todas las que la preceden, así:

Dimensión 1

Dimensión 2: incluye a la dimensión 1

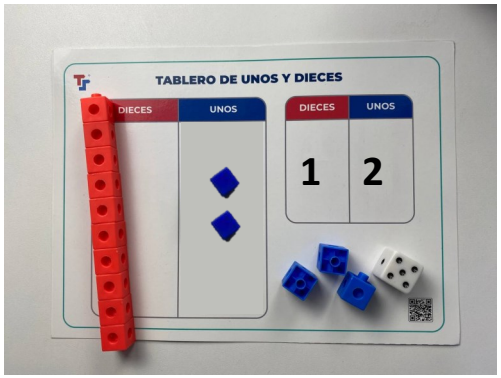
Dimensión 3: incluye a la dimensión 1 y 2

Dimensión 4: Incluye a las dimensiones 1,2 y 3.

Dimensión 5: incluye a las dimensiones 1,2 3, 4, etc.

# DIMENSIONES DE LA YUPANA MATRIZ

Figura A




Tablero posicional. Tocando los Números. Soto J. (2019).

Figura B

Tablero posicional. Tocando los Números. Soto J. (2019).

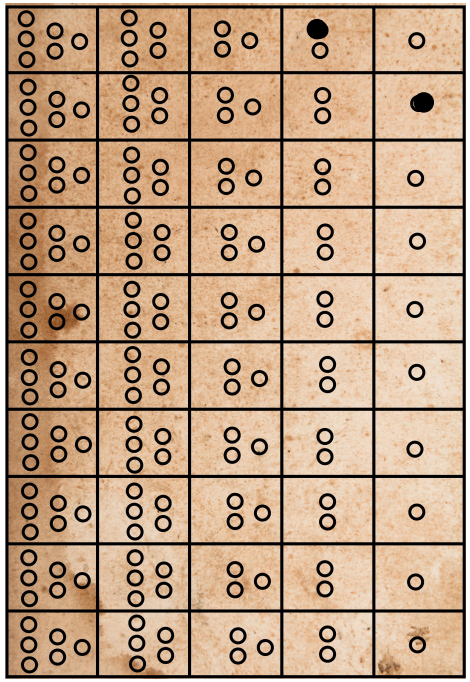


Figura C

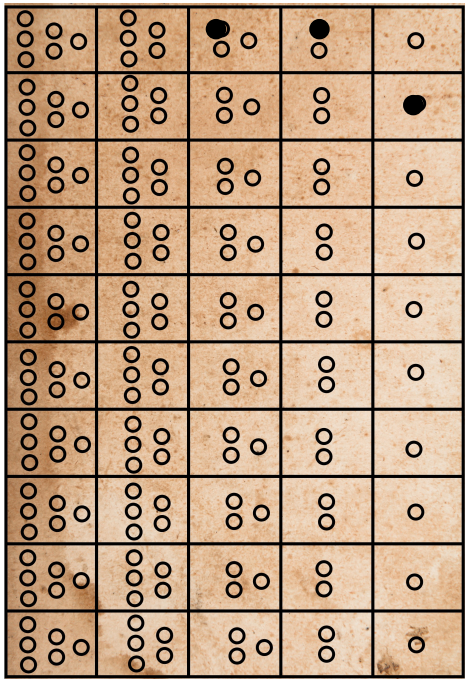


Figura D

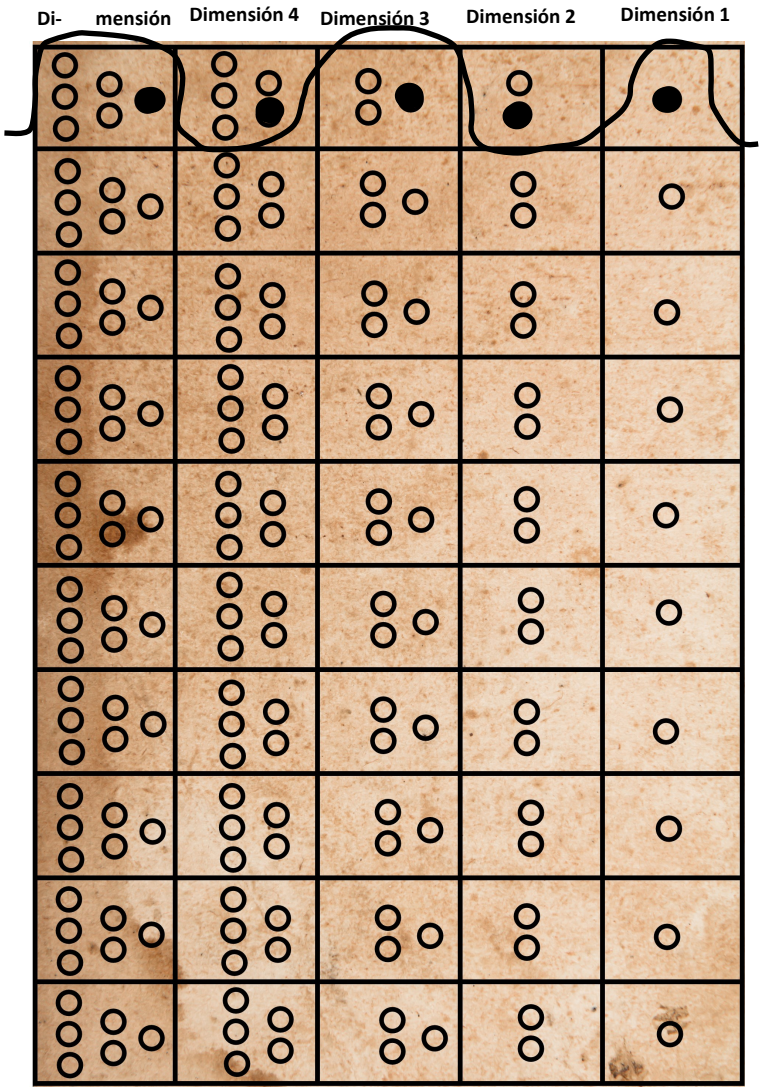
En nuestro tablero de base 10 occidental, podemos observar que cada grupo se ordena dentro de un orden (unidad, decena, centena). Para poder ser representado y ser operado.

En la figura A, se representa el 12 como 1 decena y 2 unidades, mientras que en la figura B, se representa el 112 como 1 centena, 1 decena y 2 unidades. Cada grupo una vez ordenado se encuentra en su respectivo orden.

En la figura C , se representan el número 12 en la dimensión 1 y 2. En la figura D, se representa el 112.

Es pertinente entonces, cuando utilizamos la yupana matriz, no referirnos a ordenes estrictamente como los conocemos, si no utilizar el rótulo de dimensión. Una dimensión contiene a las otras dimensiones.

# DIMENSIONES




En este sistema de dimensiones donde una dimensión mayor contiene a todas las que la preceden, nos permite ver como un número puede estar contenido a la vez en un espacio dentro de todas las demás dimensiones, sin perder la naturaleza de la dimensión a la que pertenece.

Por ejemplo podemos representar el uno en las 5 dimensiones.

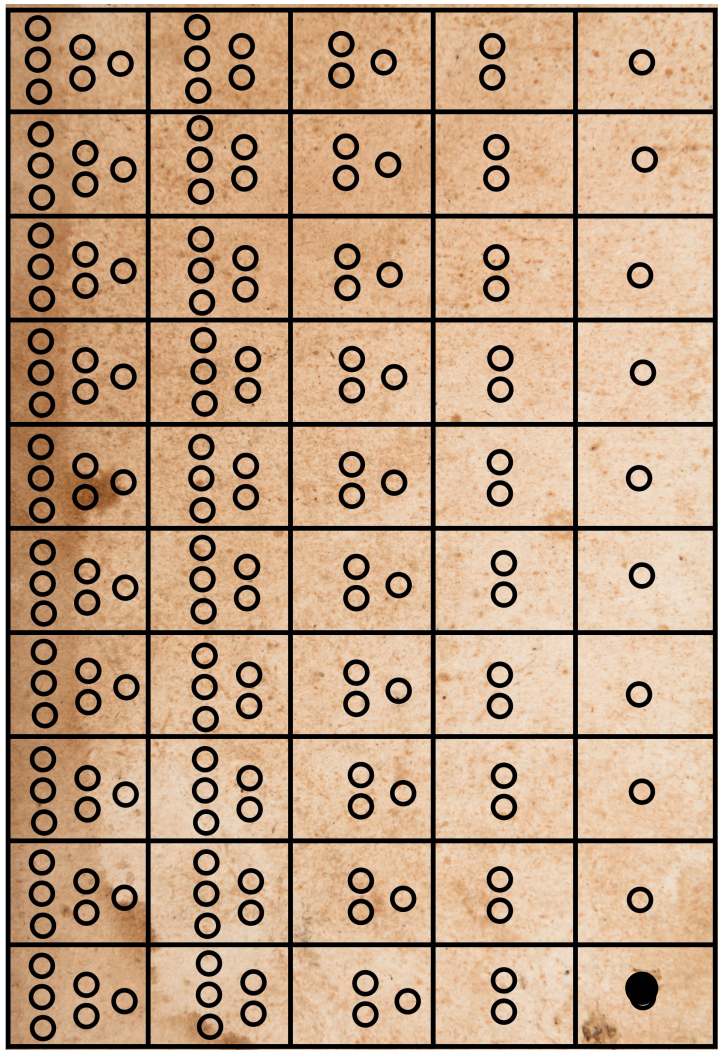
Por fines didácticos se ha colocado una semilla en cada dimensión, pero el objetivo es ilustrar que solo una semilla representa al uno, y que esta se puede mover por las cinco dimensiones, sin perder su valor de ser uno.

En las diferentes imágenes de la semilla, podemos ver el rastro y movimiento que realiza la ficha manteniendo su condición de uno.

Este movimiento que sigue la semilla para ser uno es un movimiento de onda o como una serpiente. Este mismo movimiento lo realizan los demás números en todas las dimensiones donde pueden transitar.

Este movimiento tiene un sentido, en la interpretación pedagógico que se realizará más adelante.

# CÓMO SE REPRESENTAN LOS NÚMEROS: 10

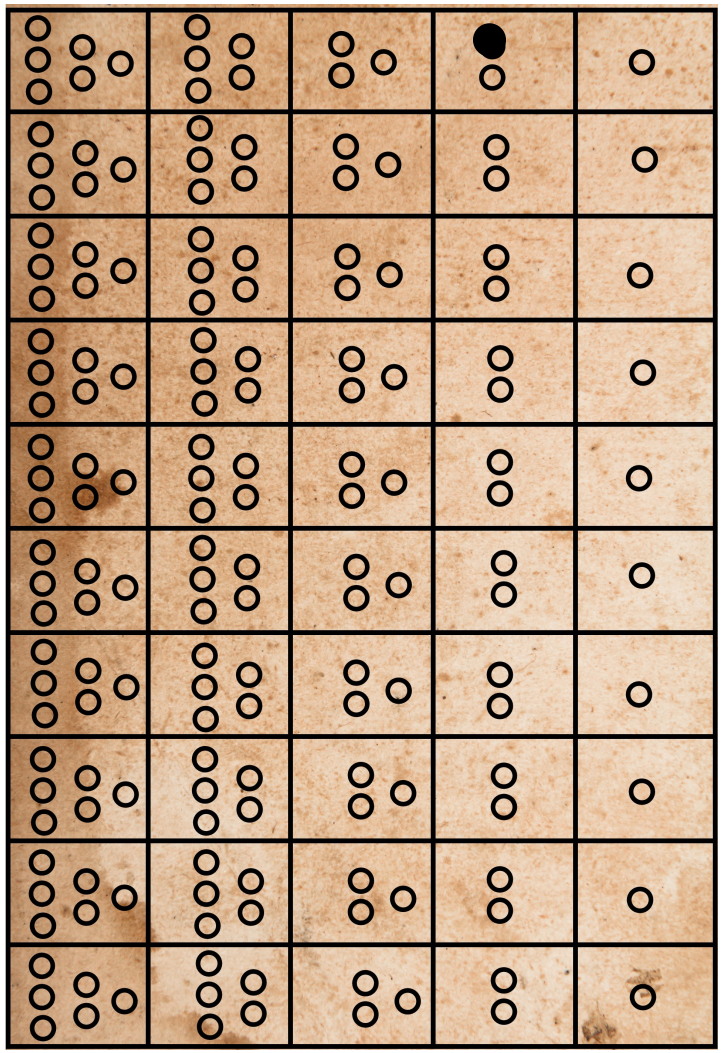


El diez se representa con la semilla en el último lugar de la dimensión 1. Cumpliendo la función de cardinal de representar un grupo de 10.

Pero también se puede representar en la segunda dimensión donde aparecen 2 ceros, debe estar representado, en la parte superior que equivale a ser un grupo de diez, mientras que el círculo de abajo que representa un cero, queda vacío indicando que la dimensión 1 en ese instante no tiene ningún elemento.

# CÓMO SE REPRESENTAN LOS NÚMEROS:10

**Figura A**

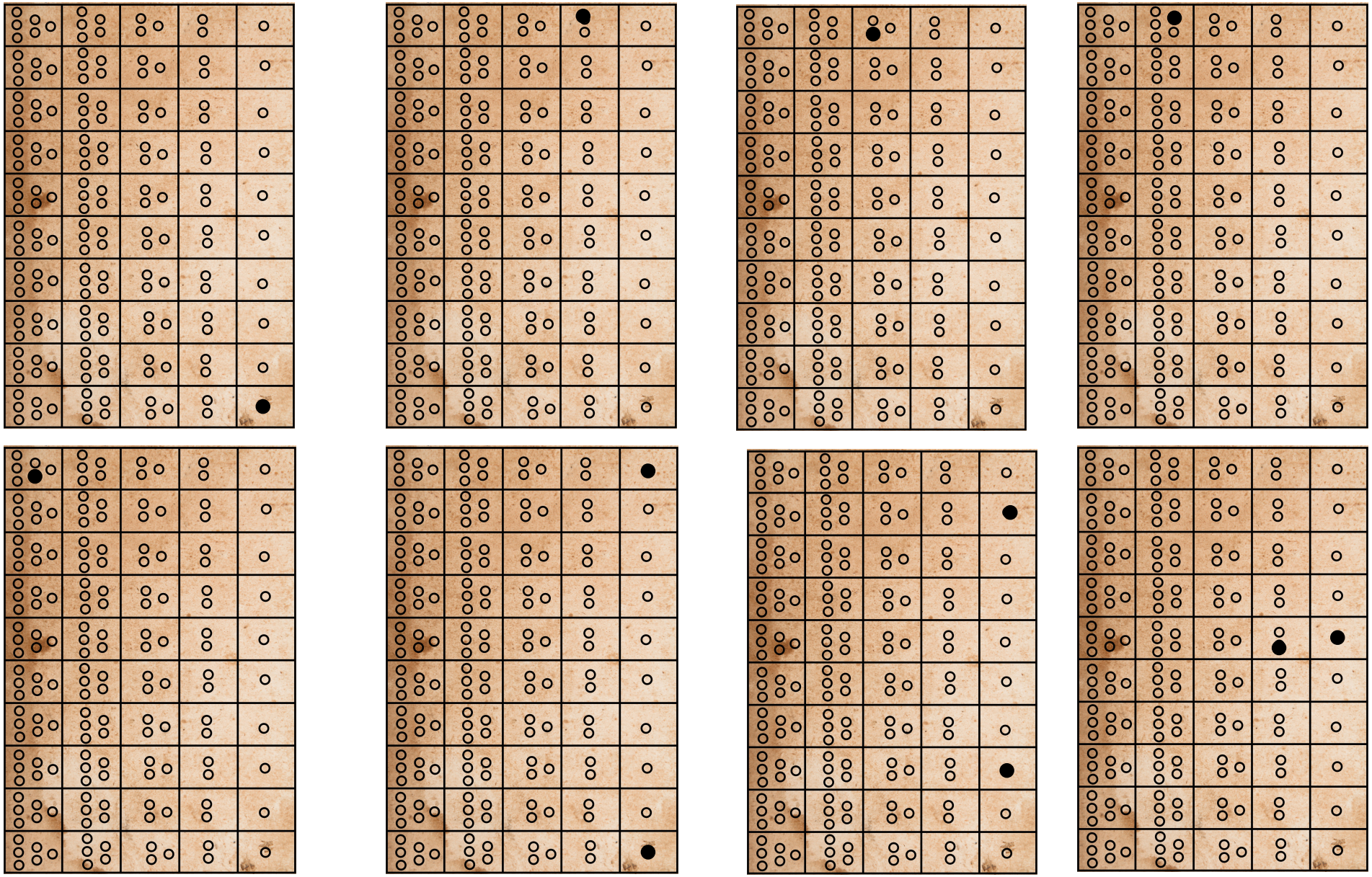


En este sistema cada cero tiene un significado. En la segunda dimensión, por ejemplo, tiene un valor que le otorgará al número que le acompañe. En la figura C, representa un grupo de 10, es decir, que la segunda dimensión tiene una decena e indica además que la dimensión 1 tiene cero unidades. En cambio en la figura D, si la semilla se encontrara debajo, indica que solo hay una unidad.

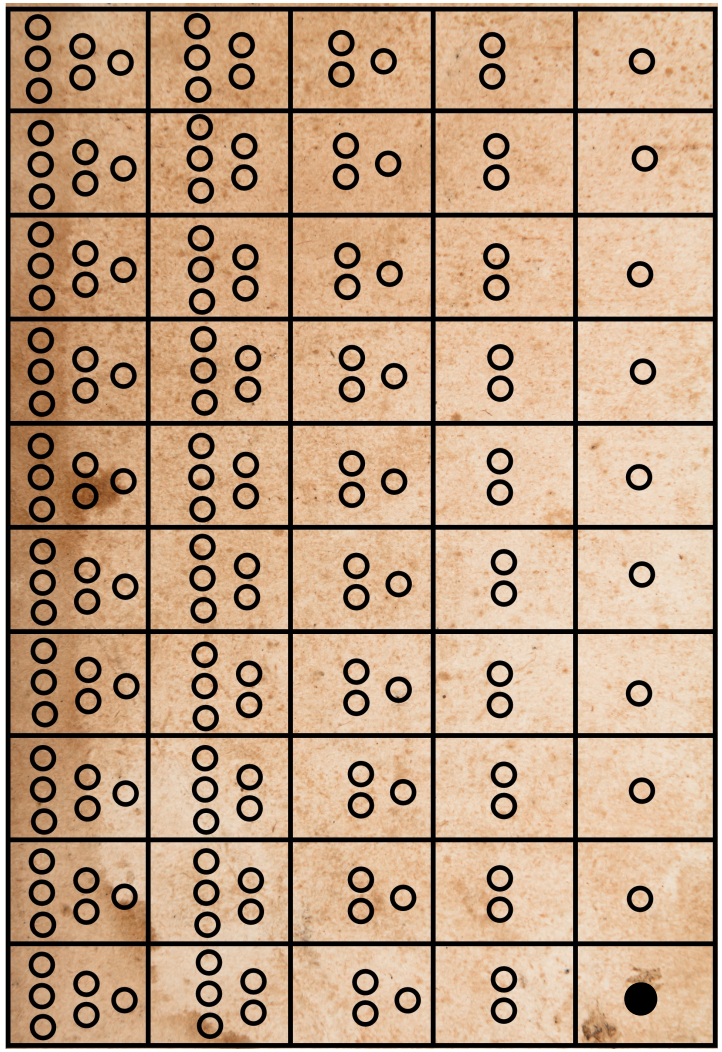
**Figura B**

**Figura C**

# CÓMO SE REPRESENTAN LOS NÚMEROS:10



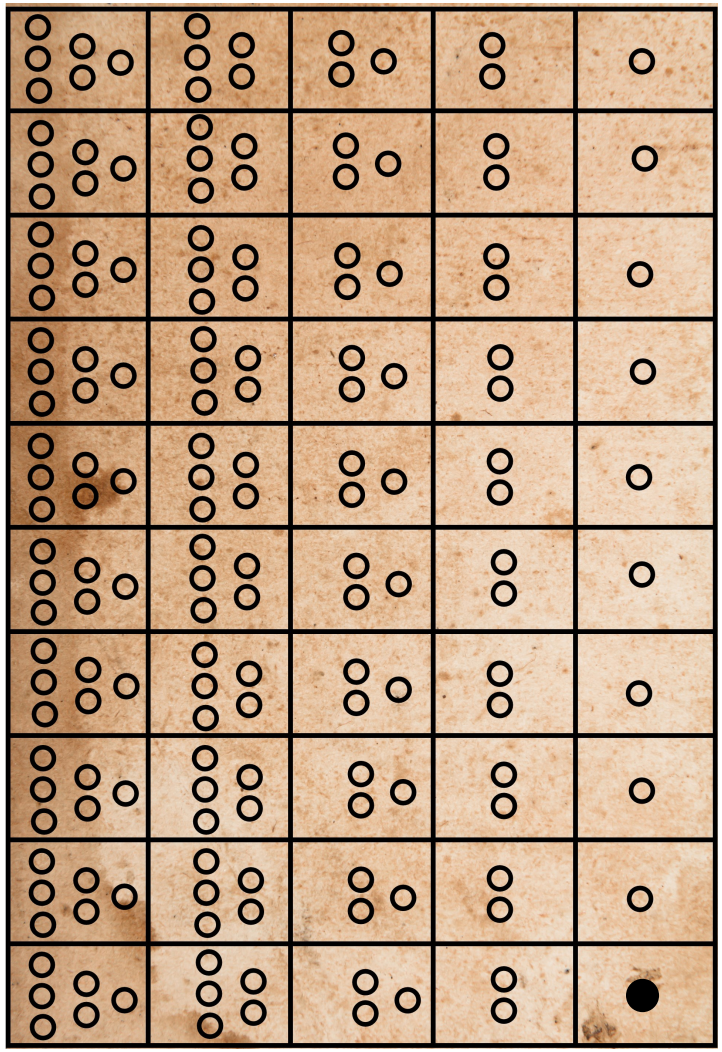
# ANÁLISIS LINGÜÍSTICO DE LA YUPANA MATRIZ



| Representa-ción en la yu-pana matriz | Número arábi-co | Nombre | Forma descompuesta |
|---|---|---|---|
| ● | 1 | Huk | Huk + chusaq |
| ● | 2 | Iskay | Huk + huk, isqai+ chusaq |
| ● | 3 | Kimsa | Huk + iskay, kimsa+chusaq |
| ● | 4 | Tawa | Huk + kimsa, iskay + iskay, tawa+chusaq |
| ● | 5 | Pisqa | Huk + tawa, iskay + kimsa, pisaq+ chusaq |
| ● | 6 | Soqta | Huck + pisqa, iskai + tawa, kima+kimsa |
| ● | 7 | Qanchis | Huk+soqta, isqai+pisqa, kimsa+tawa, |
| ● | 8 | Pusaq | Múltiples formas. |
| ● | 9 | Isqon | Múltiples formas. |
| ● | 10 | chinka | Múltiples formas. |
| ○ | 0 | Ch'usaq | ○ |

El cero, es el elemento conductor que permite dar sentido a cada semillas para que represente un cardinal, un orden y una dimensión en la yupana matriz. Esto le otorga la cualidad de que cada número se puede representar de diferentes formas conservando la estructura de grupos de diez. Diferénciese de descomponer cualquier número. A todos los números se les descompone como cero más ese número en la yupana.

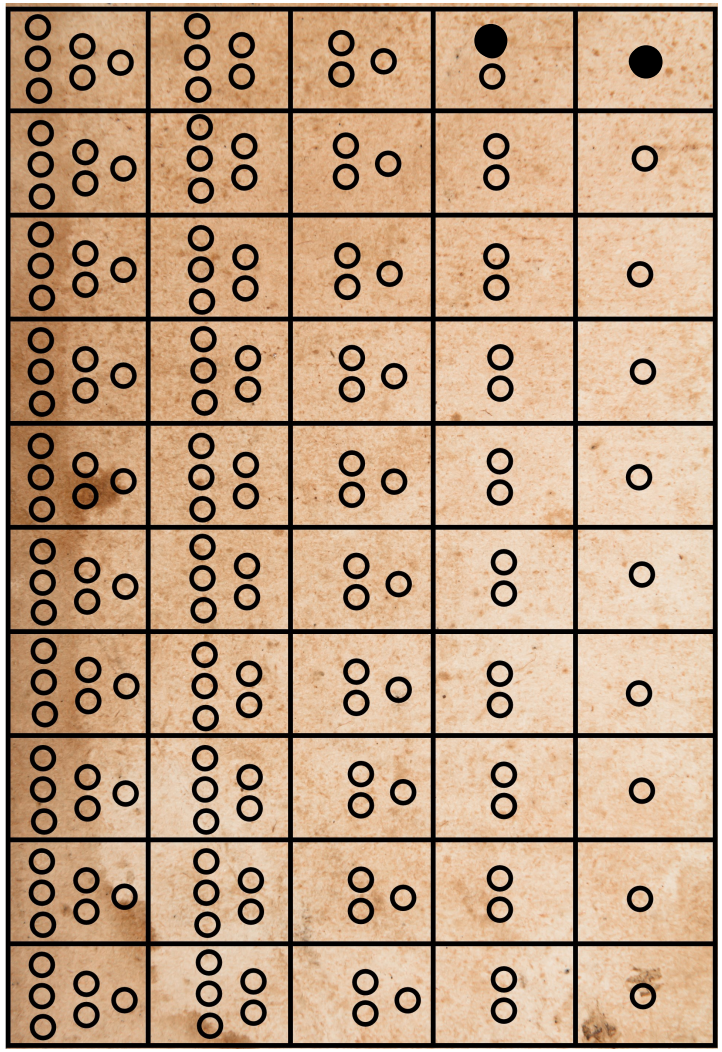
# ANÁLISIS LINGÜÍSTICO DE LA YUPANA MATRIZ



| Representa-ción en la yu-pana matriz | Número arábi-co | Nombre | Números en Aymara |
|---|---|---|---|
| ● | 1 | Huk | Maya |
| ● | 2 | Iskay | Paya |
| ● | 3 | Kimsa | Kimsa |
| ● | 4 | Tawa | Pusi |
| ● | 5 | Pisqa | phisqha |
| ● | 6 | Soqta | suxta |
| ● | 7 | Qanchis | paqallqu |
| ● | 8 | Pusaq | kimsaqallqu |
| ● | 9 | Isqon | llatunka |
| ● | 10 | chinka | tunka |
| ○ | 0 | Ch'usaq | |

En las lengua quechua y aimara encontramos algunos nombres de los números en común. Tratando de comprender la yupana matriz, es decir, su construcción mental histórica. La forma como en la lengua aimara se compone, nos permite comprender cómo se descompone, por principio de reversibilidad. Obsérvese el 7 (2 +5),8 (3 +5), (10 –1), este último se entiende como un casi 10. Utilizaremos esta información, cuando a partir de la yupana matriz se interprete la yupana de Don Huamán Poma de Ayala.

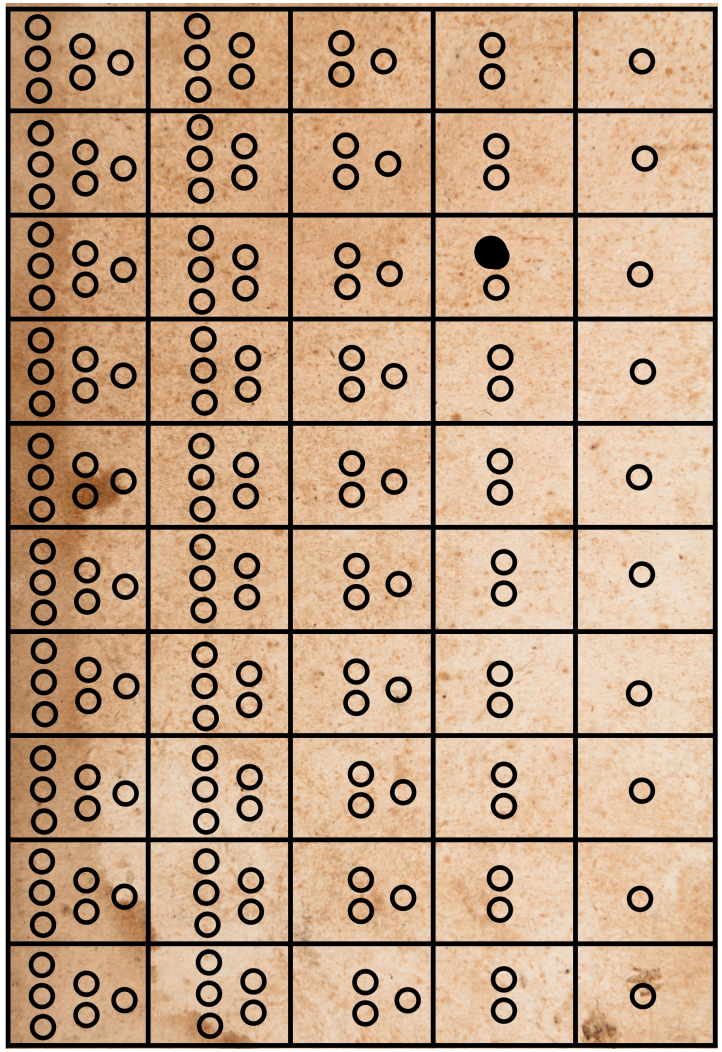
# ANÁLISIS LINGÜÍSTICO DE LA YUPANA MATRIZ



| Representa-ción en la yu-pana matriz | Número arábi-co | Nombre |
|---|---|---|
| | 11 | Chunka hukniyoq |
| | 12 | Chunka iskayniyoq |
| | 13 | Chunka kinsayoq |
| | 14 | Chunka tawayoq |
| | 15 | Chunka pisqayoq |
| | 16 | Chunka soqtayoq |
| | 17 | Chunka qanchisniyoq |
| | 18 | Chunka pusaqniyoq |
| | 19 | Chunka isqonniyoq |
| | 20 | Iskay chunka |

Si bien el 11 se puede representar de diferentes maneras como estructura de diez y también en descomposición, se observa que la yupana matriz tiene una relación directa en como se ordena la cantidad en el tablero y el nombre histórico en quechua de cada número. Los números hacia adelante siguen esta misma estructura.

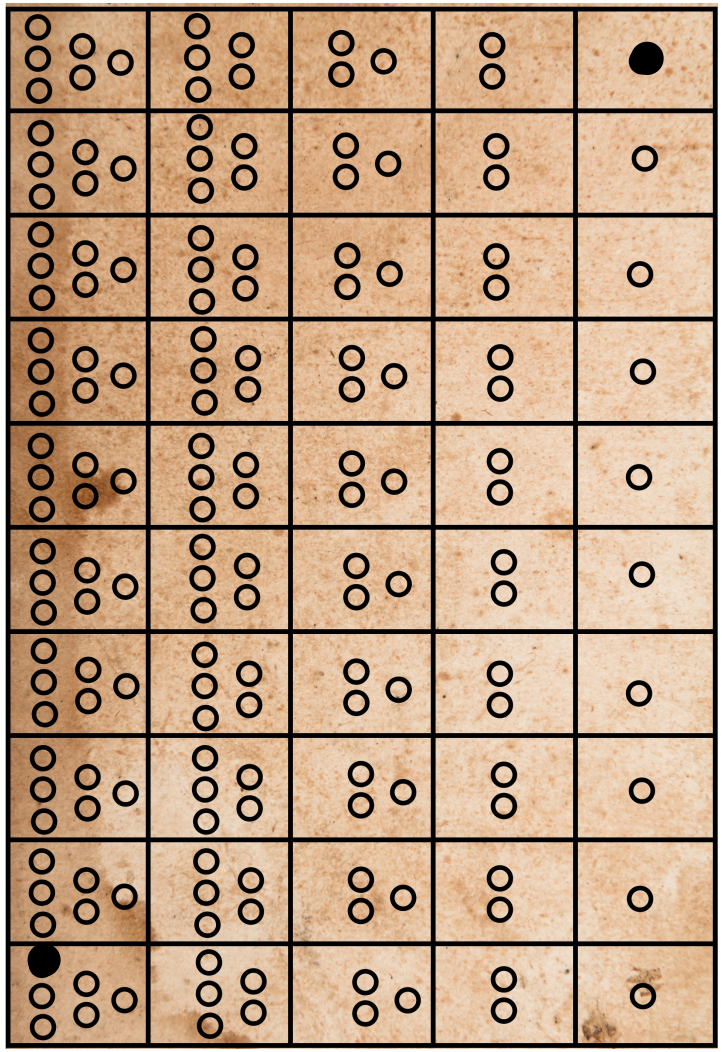
# ANÁLISIS LINGÜÍSTICO DE LA YUPANA MATRIZ



| Representación en la yupana matriz | Número arábico | Nombre |
|---|---|---|
| ● | 30 | Kinsa chunka |
| ● | 40 | Tawa chunka |
| ● | 50 | Pisqa chunka |
| ● | 60 | Soqta chunka |
| ● | 70 | Qanchis chunka |
| ● | 80 | Pusaq chunka |
| ● | 90 | Isqon chunka |
| ● | 100 | Pachak |
| ● | 1000 | Waranqa |
| ● | 10 000 | Chunka waranqa |
| ● | 100 000 | Pachak waranqa |
| ● | 1 000 000 | Waranga waranga? |

Si bien, cada número se activa cuando colocamos una semilla, el cero es el que determina la posibilidad, a los otros números, de convertirse en un número para ser representado. En la imagen se representa el kimsa chunka (30).

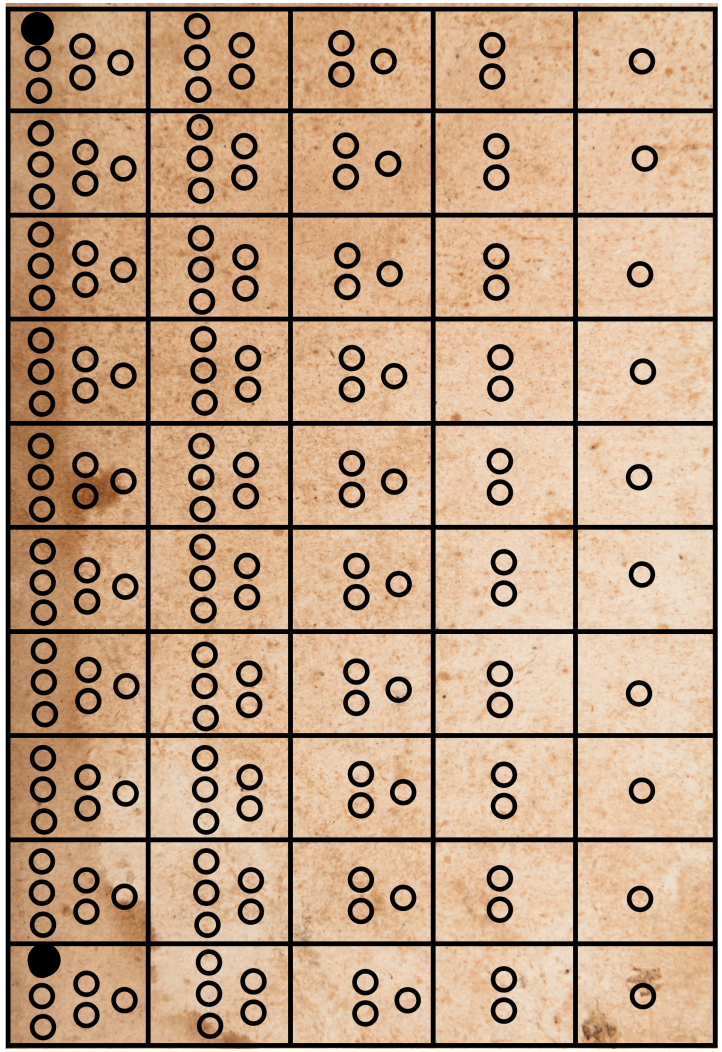
# ANÁLISIS LINGÜÍSTICO DE LA YUPANA MATRIZ



| Representa-ción en la yu-pana matriz | Número arábi-co | Nombre |
|---|---|---|
| ● | 30 | Kinsa chunka |
| ● | 40 | Tawa chunka |
| ● | 50 | Pisqa chunka |
| ● | 60 | Soqta chunka |
| ● | 70 | Qanchis chunka |
| ● | 80 | Pusaq chunka |
| ● | 90 | Isqon chunka |
| ● | 100 | Pachak |
| ● | 1000 | Waranqa |
| ● | 10 000 | Chunka waranqa |
| ● | 100 000 | Pachak waranqa |
| ● | 1 000 000 | Waranga waranga? |

En la imagen se representa con una sola semilla  respectivamente huk (una unidad) y waranga waranga (un millón). Representar con una sola semilla, que cumple el rol de manipulativo e indicar el valor de los órdenes que le preceden solo es posible porque los círculos cumplen la función de cero.

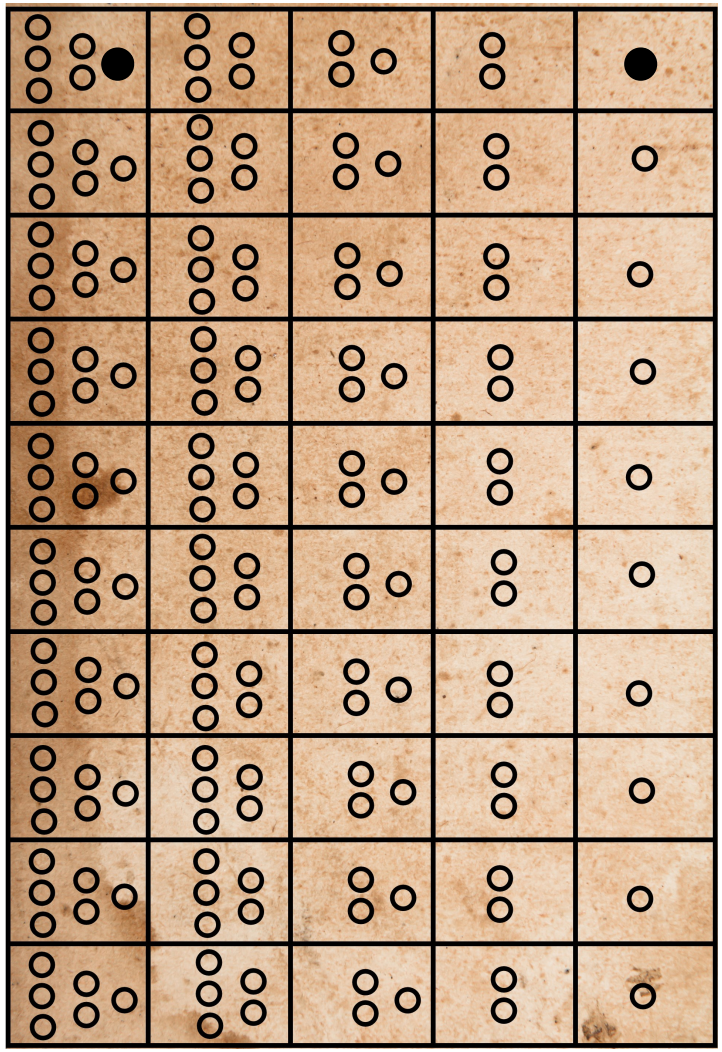
# ANÁLISIS LINGÜÍSTICO DE LA YUPANA MATRIZ



| Representa-ción en la yu-pana matriz | Número arábi-co | Nombre |
|---|---|---|
| ● | 60 | Soqta chunka |
| ● | 70 | Qanchis chunka |
| ● | 80 | Pusaq chunka |
| ● | 90 | Isqon chunka |
| ● | 100 | Pachak |
| ● | 1000 | Waranqa |
| ● | 10 000 | Chunka waranqa |
| ● | 100 000 | Pachak waranqa |
| ● | 1 000 000 | Waranga waranga? |

En la imagen se representa con una sola semilla respectivamente pachak waranga (cien mil) y waranga waranga (un millón). Una semilla puede estar en la misma fila y dimensión, pero pertenecer a un orden diferente en la yupana matriz. Esto no sucede en nuestro tablero posicional estándar(unidad, decena, centena...); tampoco que un orden esté incluido en otro orden, por ello el concepto orden no describe fielmente la estructura de este tablero yupana matriz, por lo que utilizamos el concepto de dimensión que es un espacio que incluye órdenes que le preceden.

# ANÁLISIS LINGÜÍSTICO DE LA YUPANA MATRIZ



| Representación en la yupana matriz | Número arábico | Nombre |
|---|---|---|
| ● | 60 | Soqta chunka |
| ● | 70 | Qanchis chunka |
| ● | 80 | Pusaq chunka |
| ● | 90 | Isqon chunka |
| ● | 100 | Pachak |
| ● | 1000 | Waranqa |
| ● | 10 000 | Chunka waranqa |
| ● | 100 000 | Pachak waranqa |
| ● | 1 000 000 | Waranga waranga? |

En la imagen, observamos, con fines didácticos, no operativos, que se representa una unidad, tanto el la dimensión 1 como en la dimensión 5.

Si lo vemos desde la perspectiva de la operatividad, tendríamos una representación o suma de dos unidades, que podemos simplificar con una sola semilla en la dimensión 1 (fila 2, columna 1). El sentido de pertenencia en los números, puede estar arraigada a la forma de ver y pensar de las personas sobre comunidad.

# FUNCIÓN DEL NÚMERO CERO

Figura A

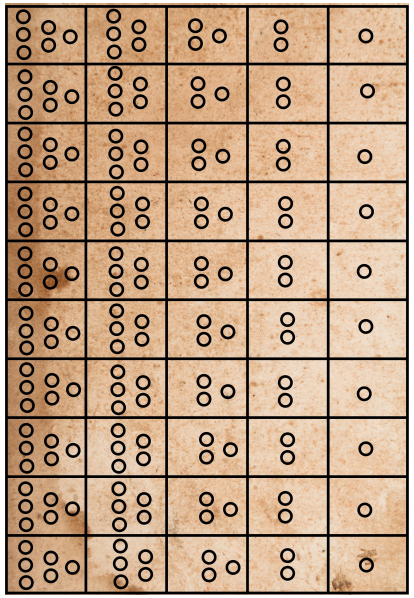


Figura B

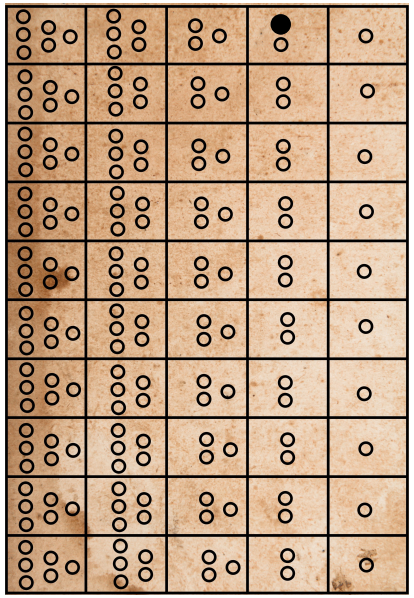


Figura C

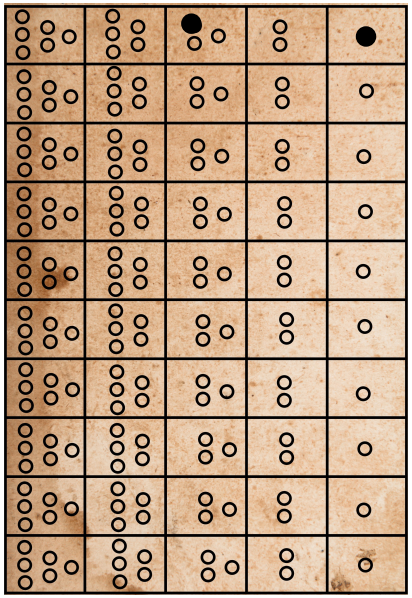
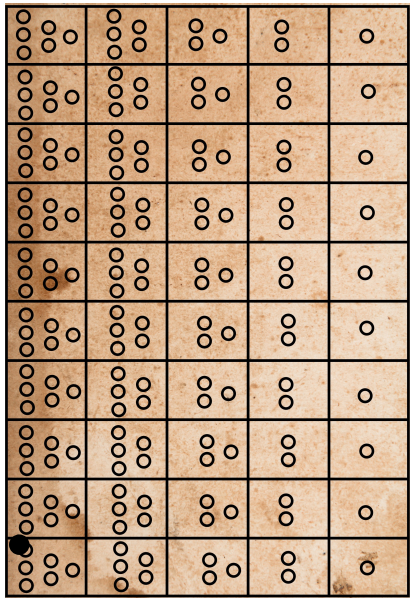
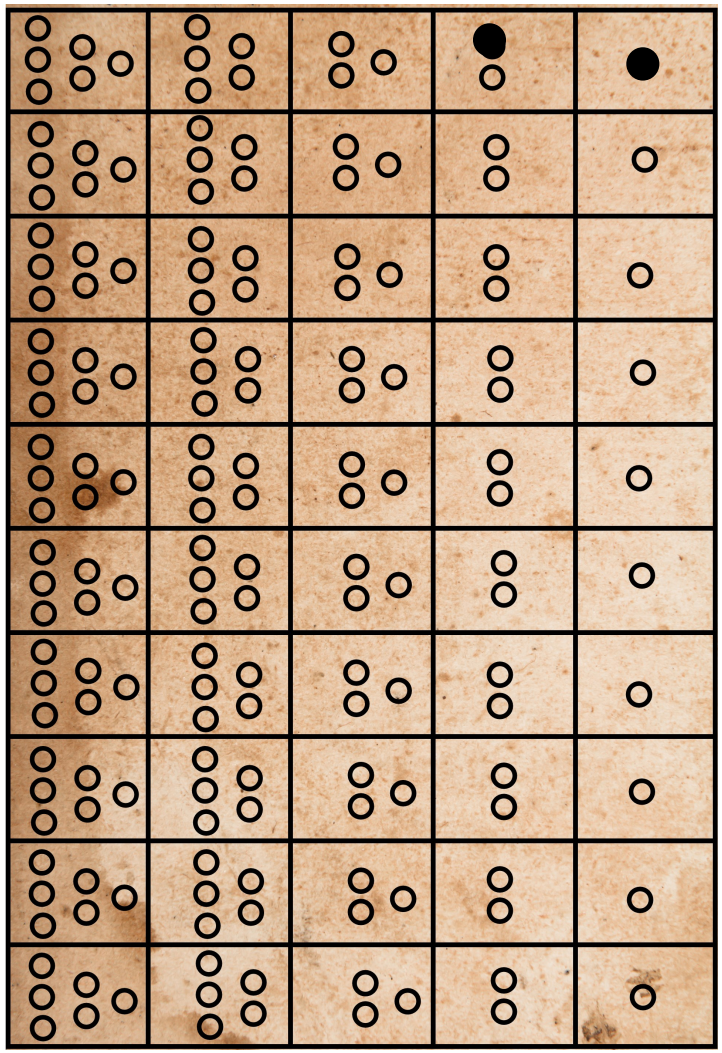


Figura D



En las siguientes yupanas se representa el valor que cumple el cero dentro de cada construcción. En la figura A, observamos la distribución de los ceros en cada una de las dimensiones. En la figura B, el cero debajo de la semilla indica no solo que hay un grupo de diez, si no que la dimensión anterior se encuentra vacía (percibiendo globalmente una cantidad en la yupana ). En la figura C, se representa el 101, el cero en la dimensión 2 permite comunicar el valor del número. En la figura D, se representa 1 000 000, esto es posible gracia al valor que cumple el cero en cada una de las posiciones. Aún cuando no hubiere ninguna semilla y todos los ceros estén en el tablero, cada cero en su posición indica la ausencia de un grupo que puede ser una unidad, o cinco unidades, diez mil, un millón, cero centenas, etc. Cada símbolo del cero, representa diferentes tipos de significado para modificar a un número en particular. Desde el más simple que es la ausencia de algo, hasta algo más específico de ser la ausencia de algo en particular: la ausencia de 100 , por ejemplo, la ausencia de 100 000. Ellos sabían que los círculos los movían hacia números tan grandes que sobrepasaban la imaginación, aunque no fuera necesario en sus actividades cotidianas. El cero modifica a quien lo acompaña, porque una misma semilla puede ser 0 + 1= huk o 100 000. Sabían una forma de representar el cero (círculo) con su tecnología que pasó de lo concreto al símbolo. Además, el cero tenía no solo un valor intrínseco junto a los otros números, si no que es el protagonista e hilo conductor de este sistema que se parece a un fractal, una matriz percibida como un panal de abeja complejo y ordenado.

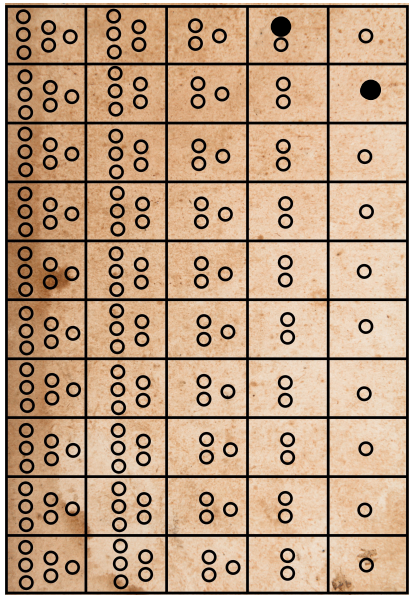
# DIEZ Y UNO

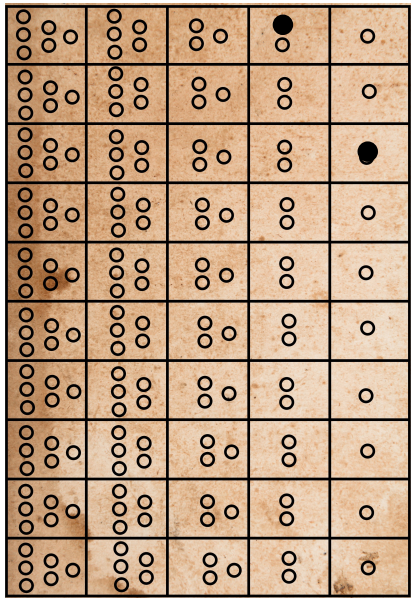


Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 11.

Para ello vamos a representar, primero un grupo de diez, luego uno. La forma más eficiente de hacerlo es 1 unidad en la dimensión 1 y 1 decena en la dimensión 2. Hay otras, muchas formas de hacerlo.

# DIEZ Y DOS , DIEZ Y TRES

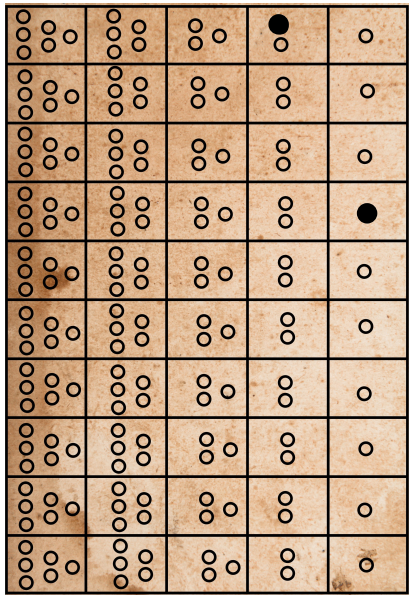


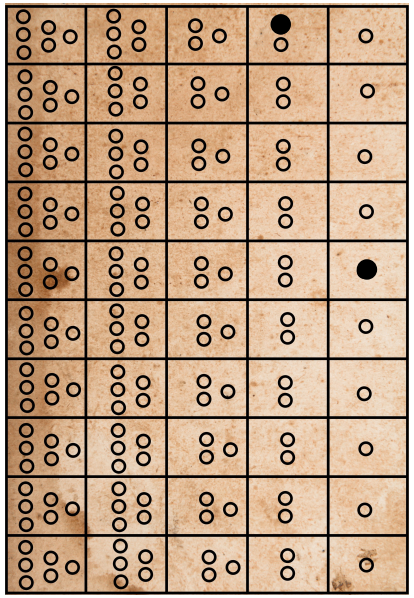


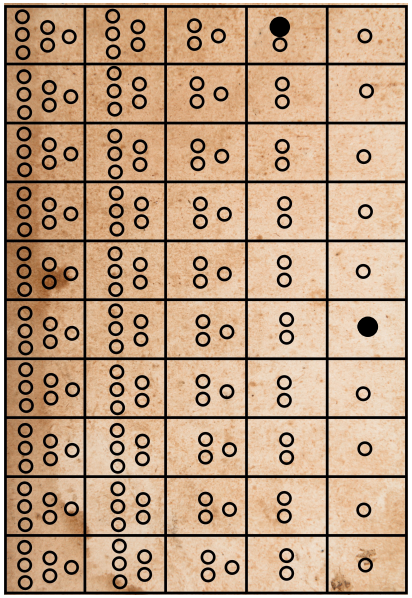
Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 12 y 13.

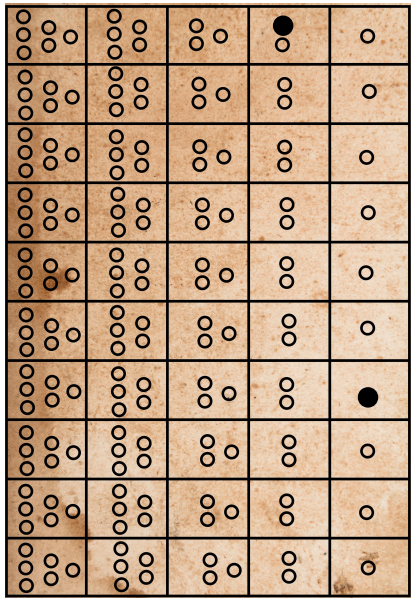
Para ello vamos a representar, primero un grupo de diez, luego dos; una decena y luego 3 unidades. La forma más eficiente de hacerlo es 1 unidad en la dimensión 1 y 1 decena en la dimensión 2 y 2 unidades; dimensión 1 y 1 decena en la dimensión 2 y 3 unidades respectivamente. Hay otras, muchas formas de hacerlo.

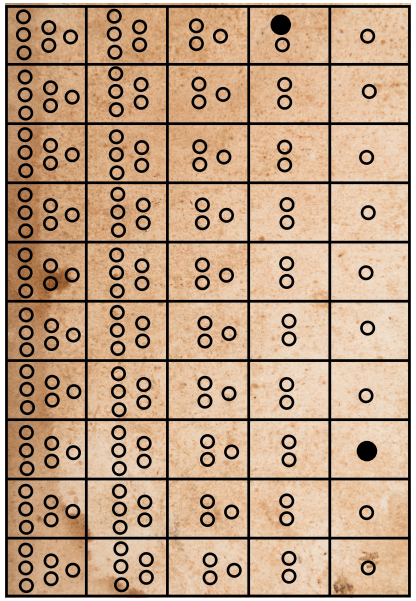
# 14 AL 19

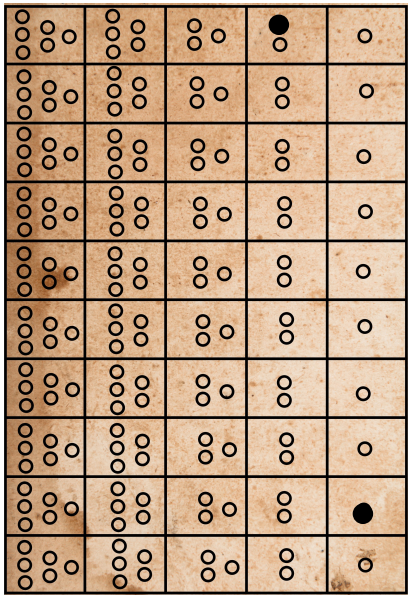




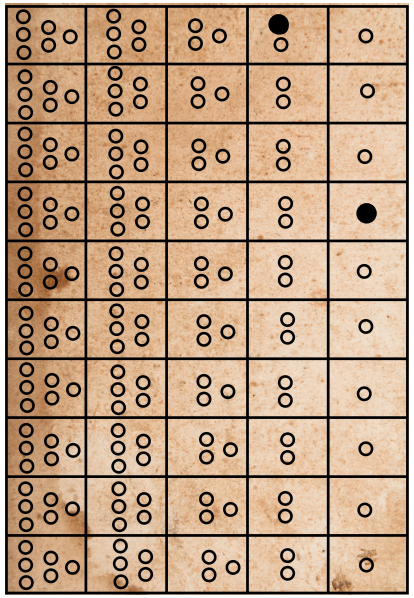


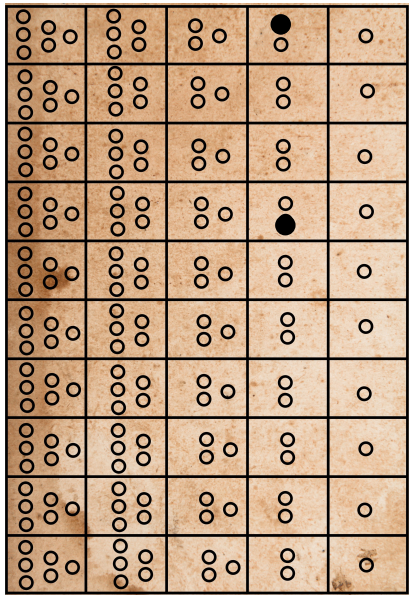


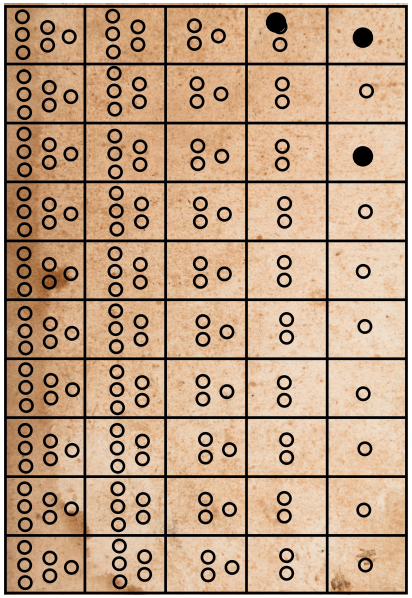


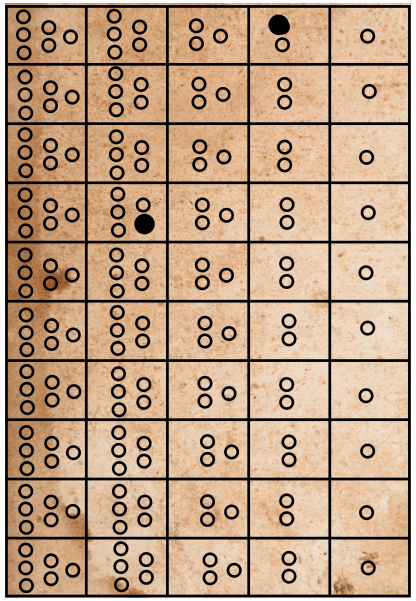


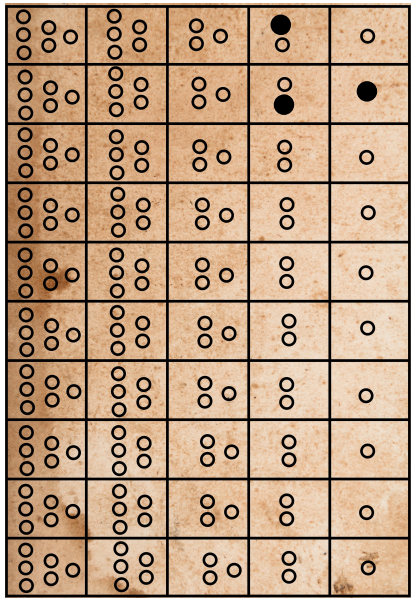
# MULTIREPRESENTACIÓN DEL14

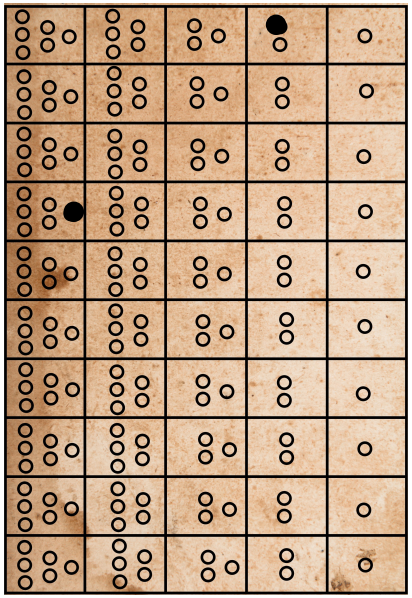




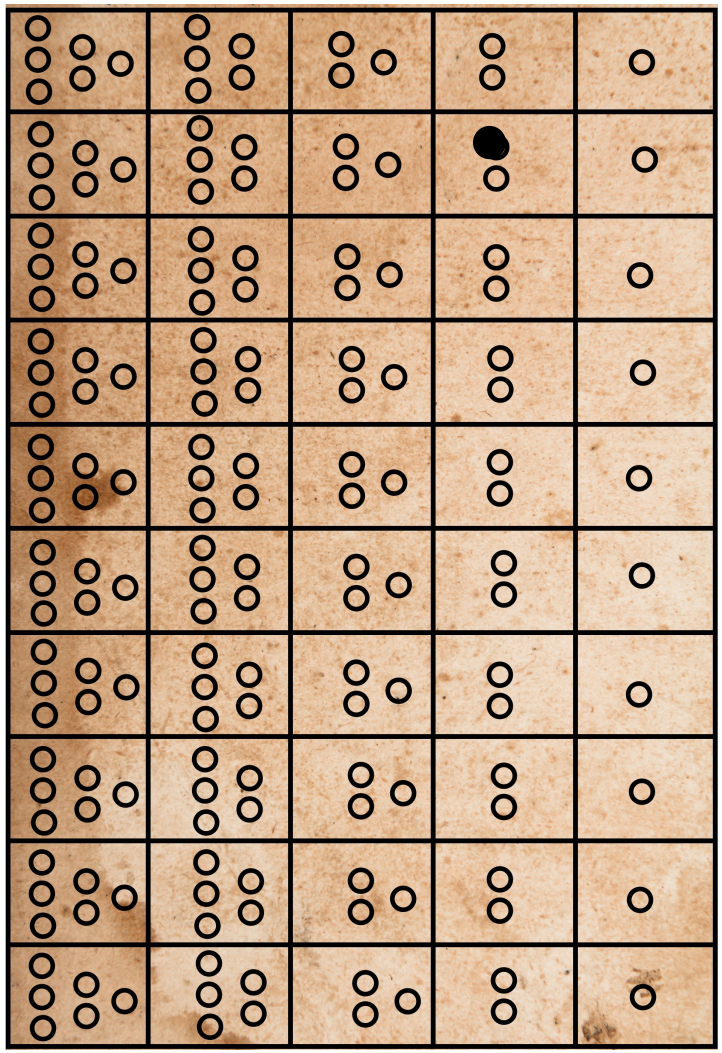








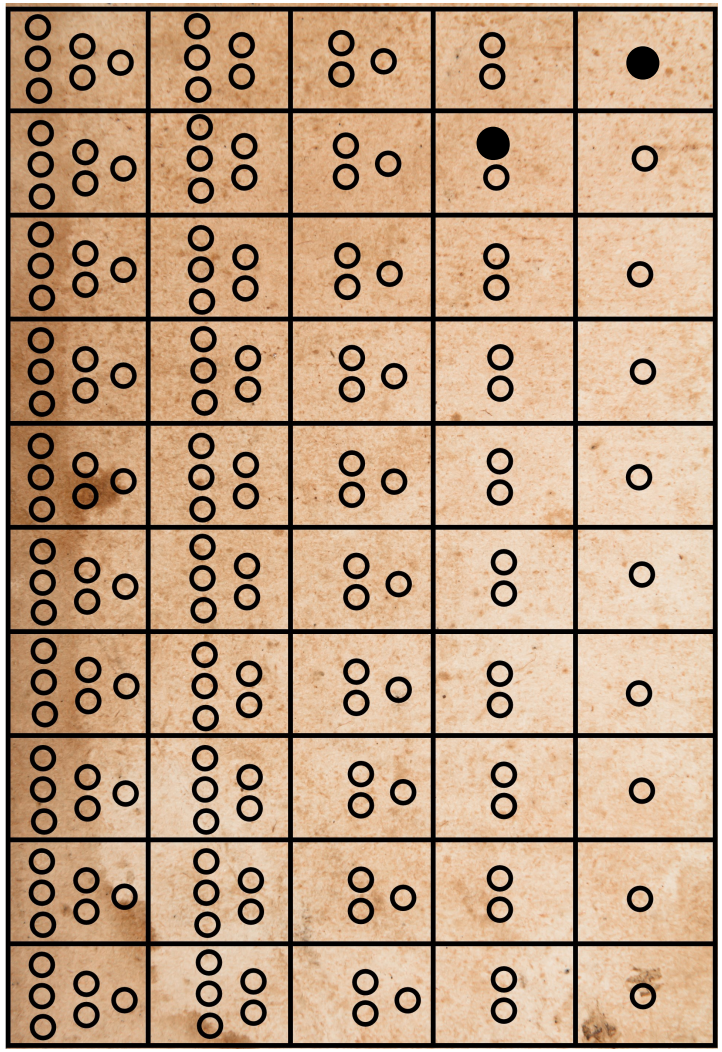
# 20



Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 20.

Siguiendo las dimensiones y el camino de onda, representamos 2 decenas. Esta cantidad se puede representar como 10 + 10, 11 + 9, etc.

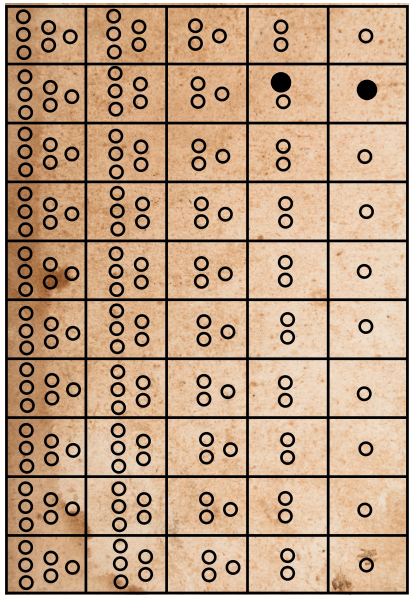
# 21

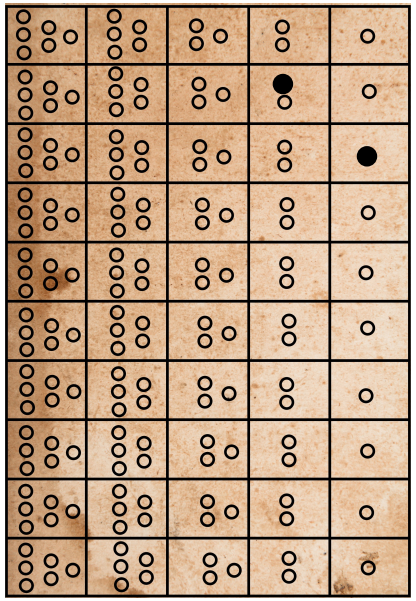


Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 21.

Siguiendo las dimensiones y el camino de onda, representamos 2 decenas y una unidad. Esta cantidad se puede representar como 20 + 1, 10 + 10 +1, entre otros.

# 22, 23



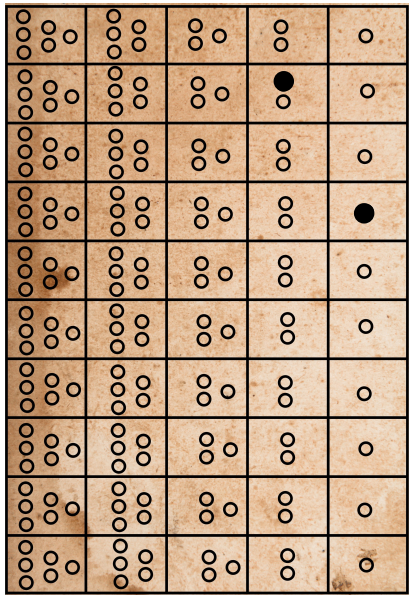


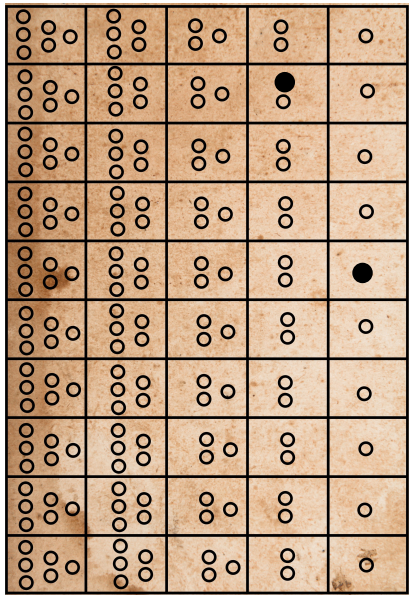
Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, los números 22 y 23.

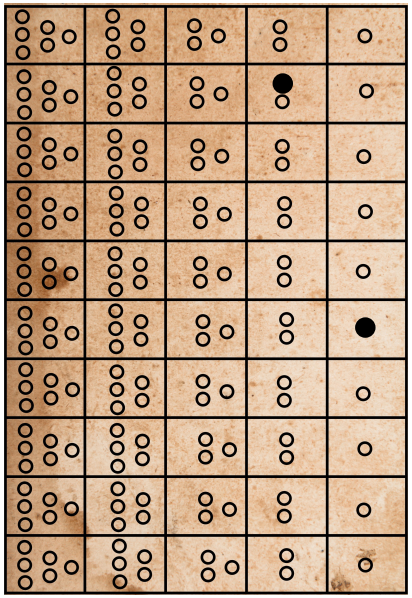
Siguiendo las dimensiones y el camino de onda, representamos 2 decenas y 2 unidades. Obsérvese como se encuentran alineados los números 2.

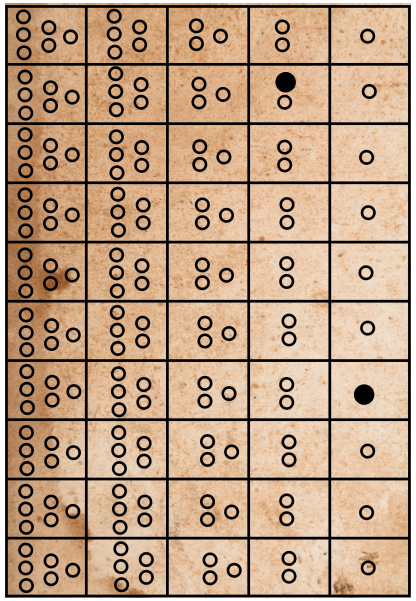
Por otro lado, podemos representar también el 23 como 2 decenas y 3 unidades.

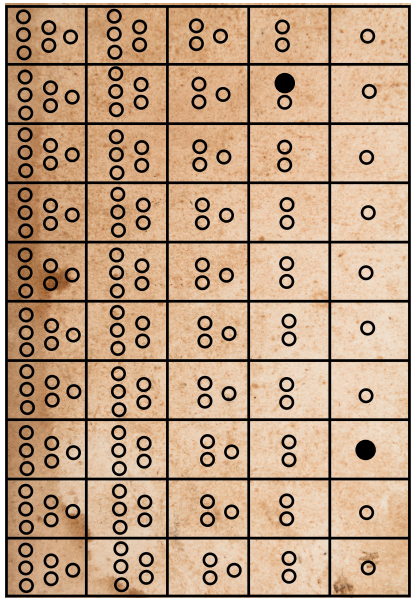
# 24 AL 29

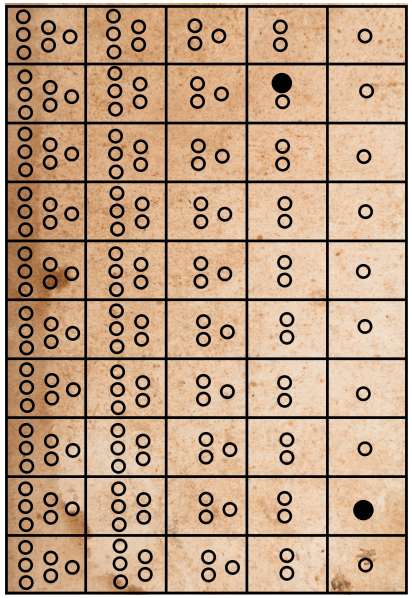




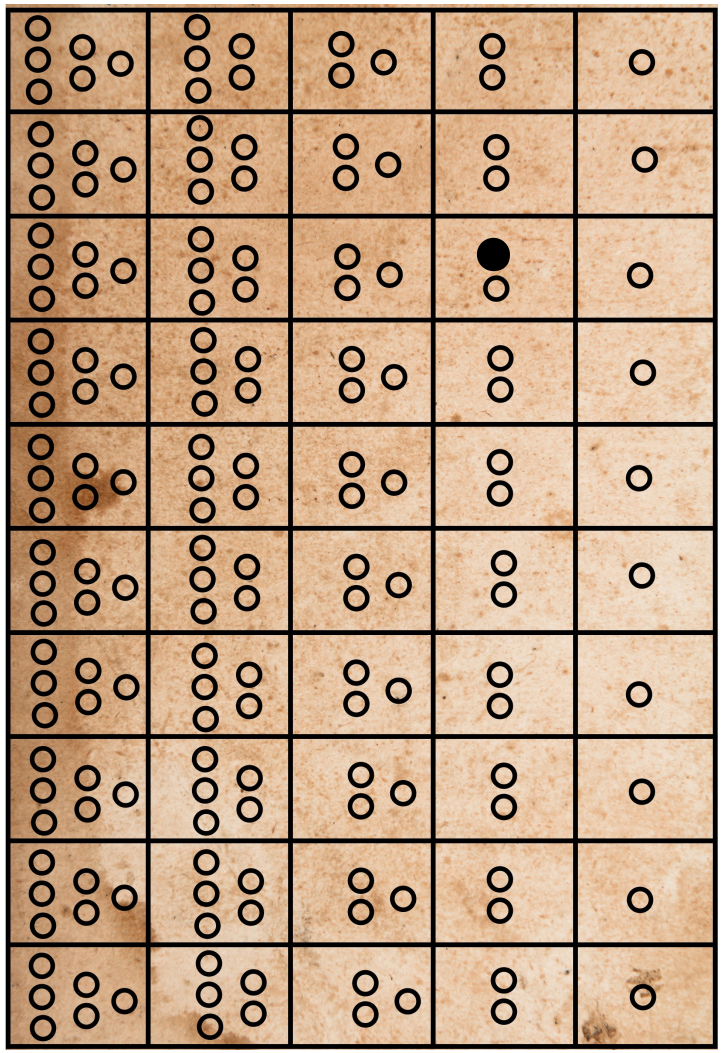








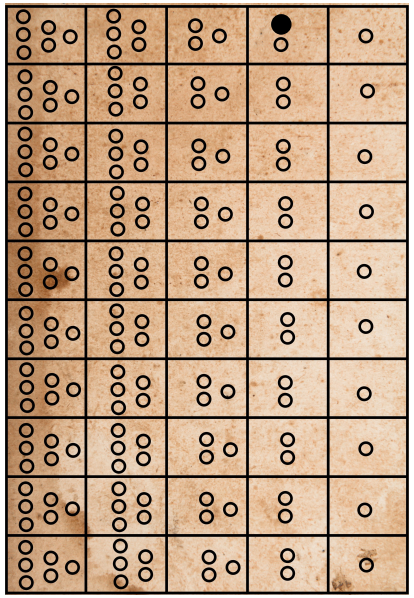
# 30

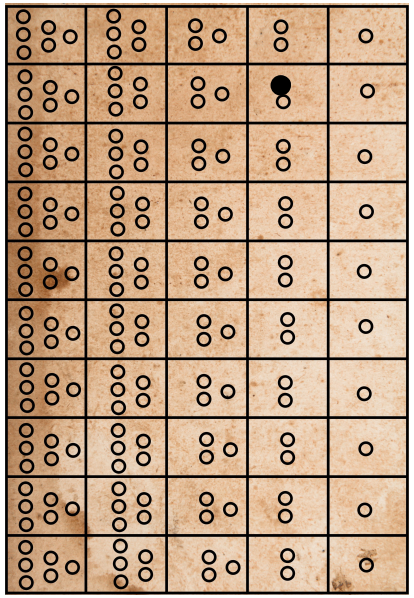


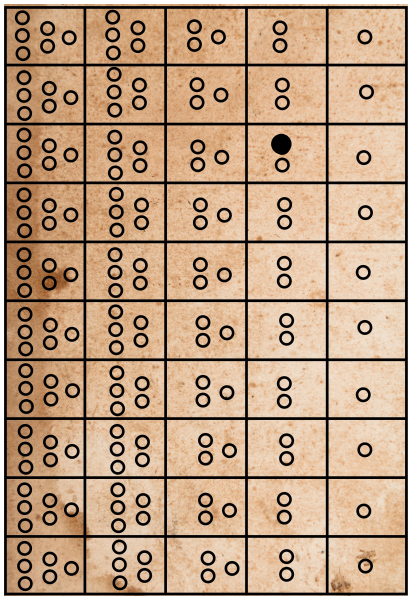
Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 30.

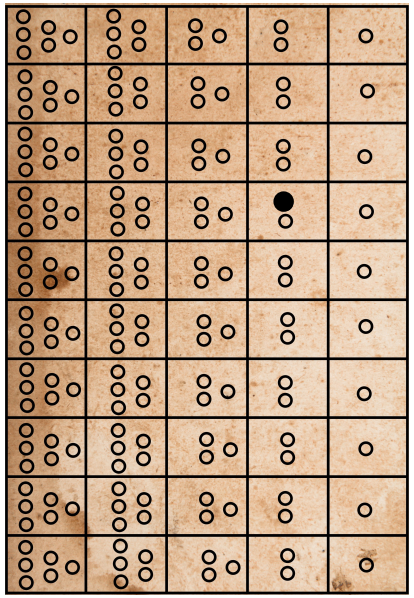
Siguiendo las dimensiones y el camino de onda, representamos 3 decenas. Esta cantidad se puede representar como 10 + 10 + 10; 10 + 11 + 9, etc.

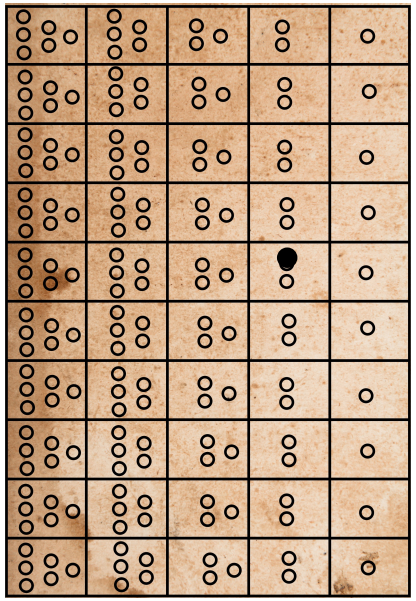
# 10 AL 80

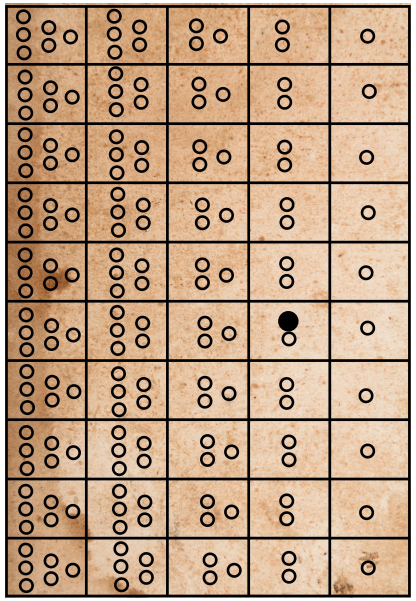


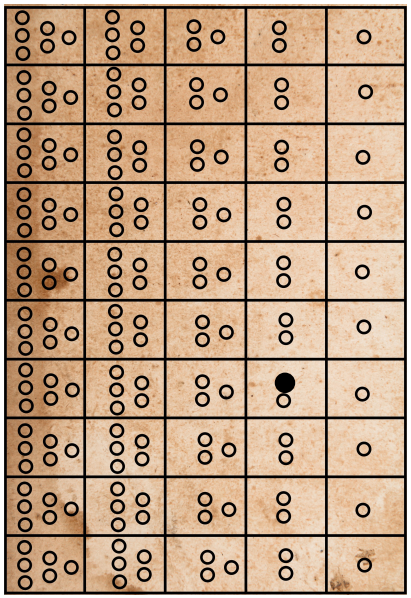


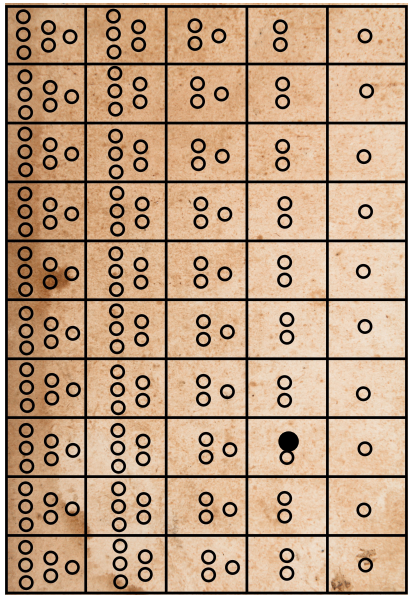




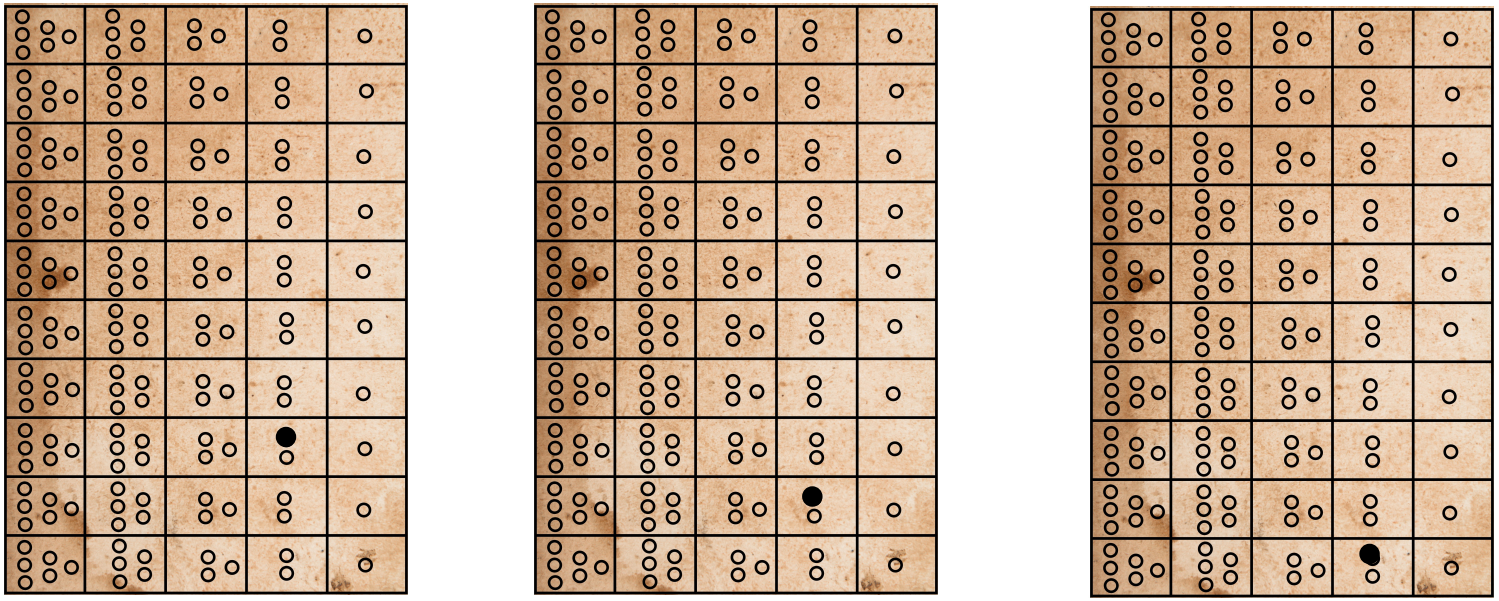






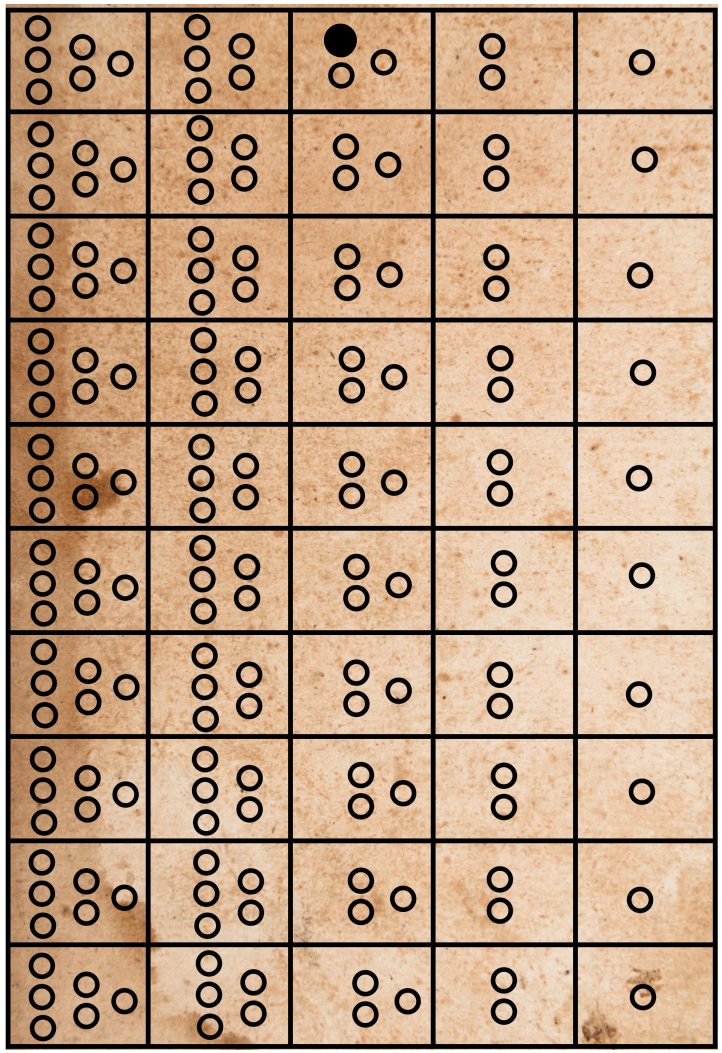


# 80 al 100



En las siguientes yupanas se representa los cardinales de 80, 90 y 100, al llegar a formarse un grupo de diez veces diez o una centena, podemos representarlo en la siguiente dimensión.

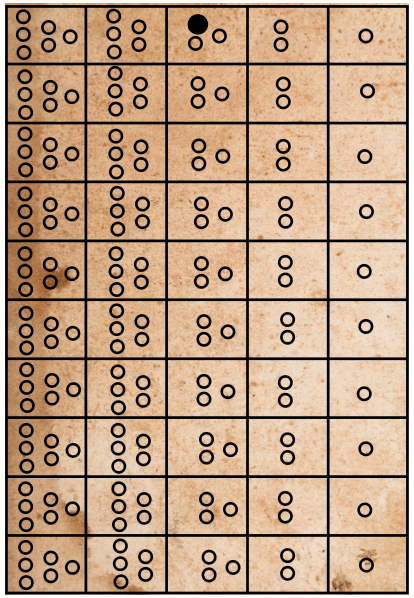
# 100

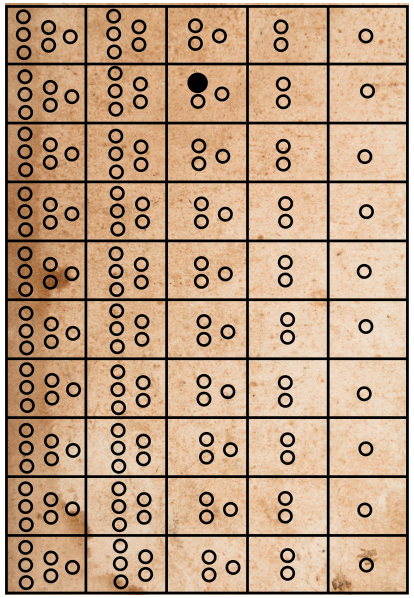


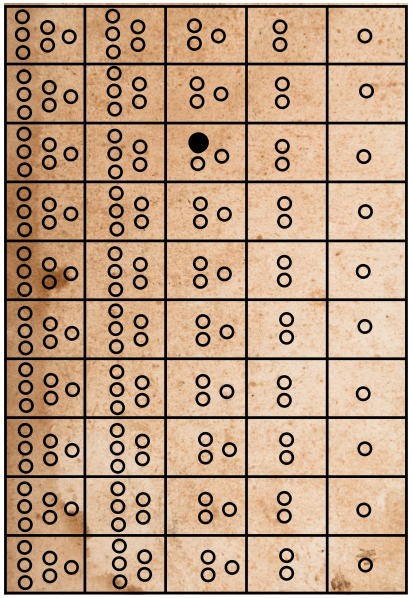
Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 100.

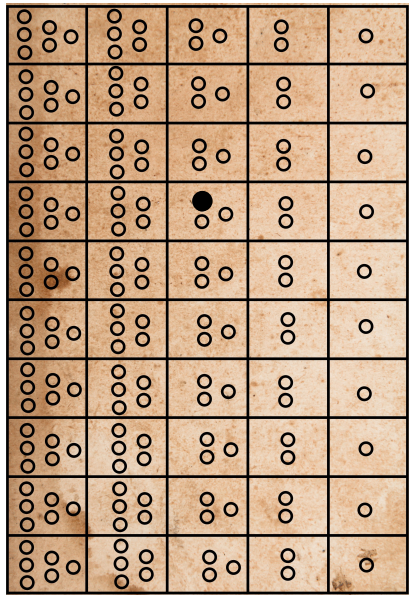
En la yupana acabamos de representar con una semilla ,un lugar que era cero. Ahora ese lugar ocupa una semilla y el valor que le otorga el cero, hace que sea 100.

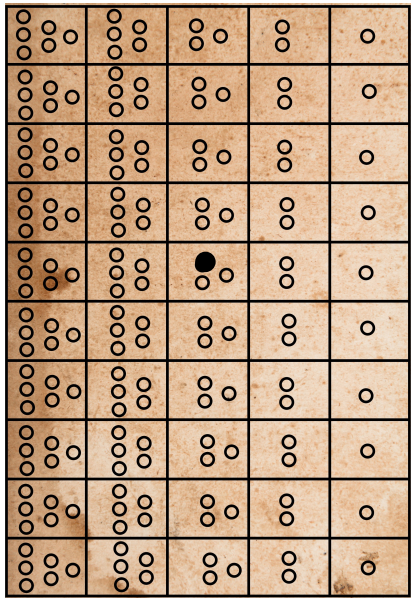
# 100 al 800

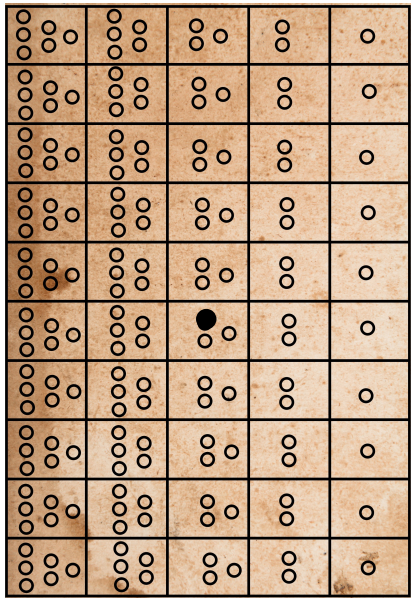


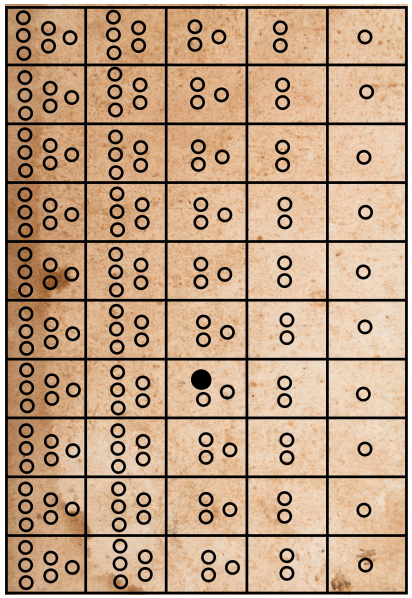


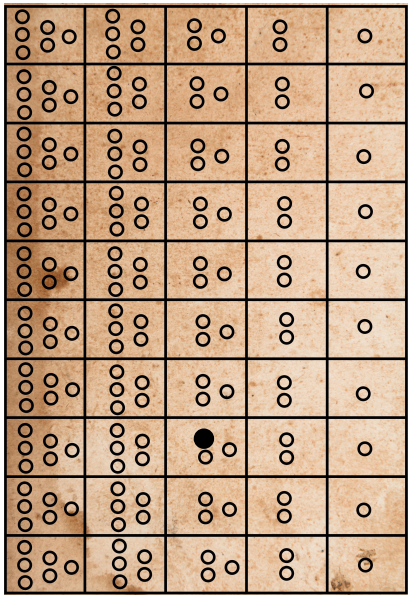




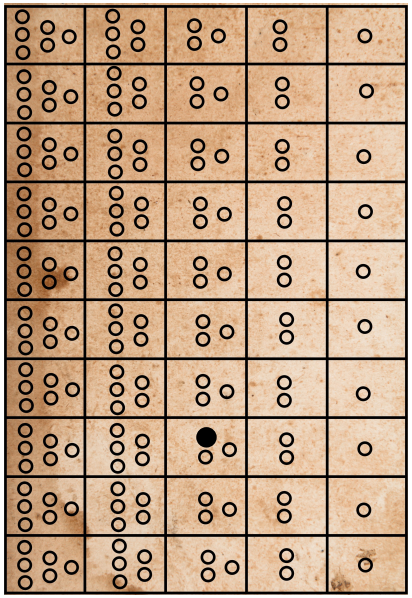


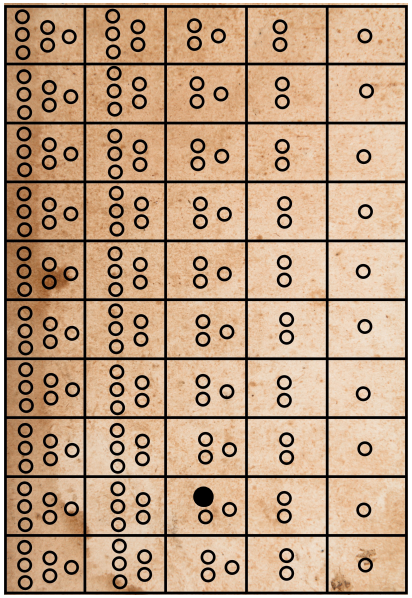


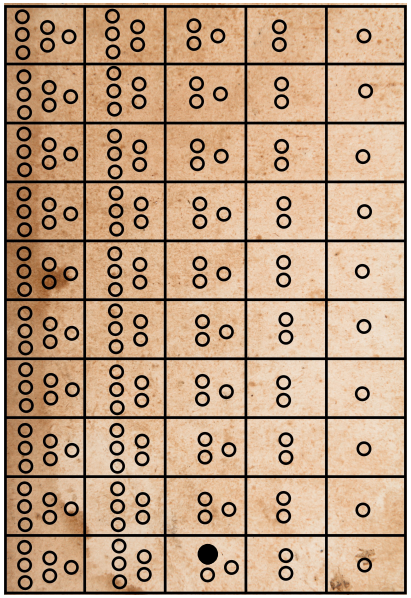




# 800 al 1000

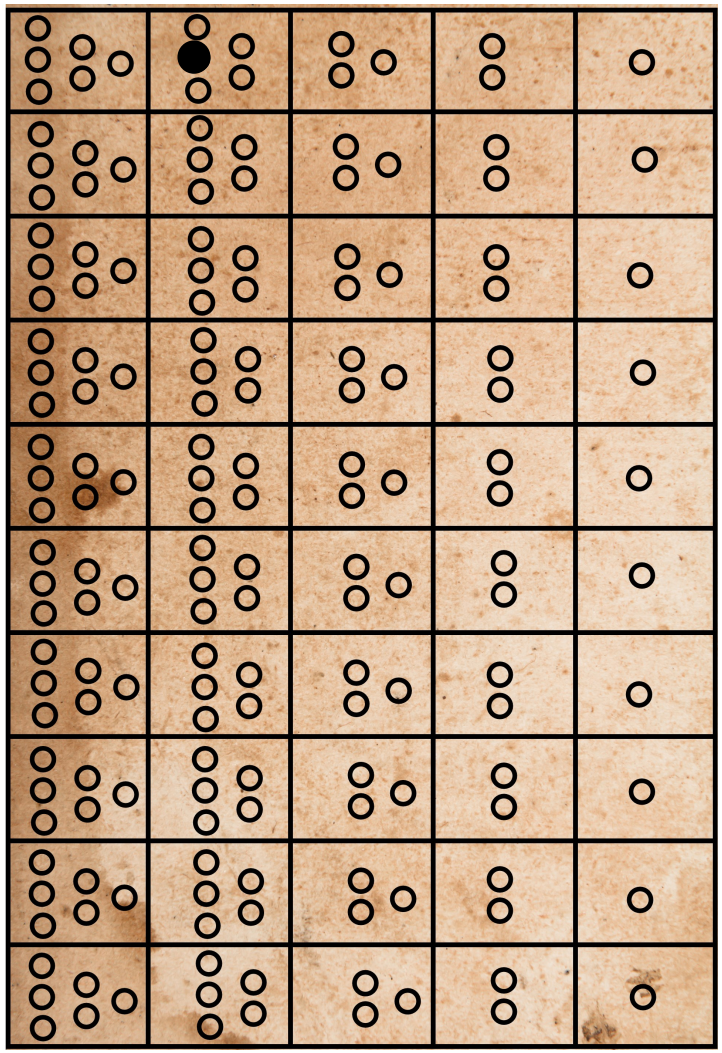






En las siguientes yupanas se representa los cardinales de 800, 900, 1 000. Al llegar a formarse un grupo de diez veces una centena. Podemos representarlo en la siguiente dimensión.

# 1 000

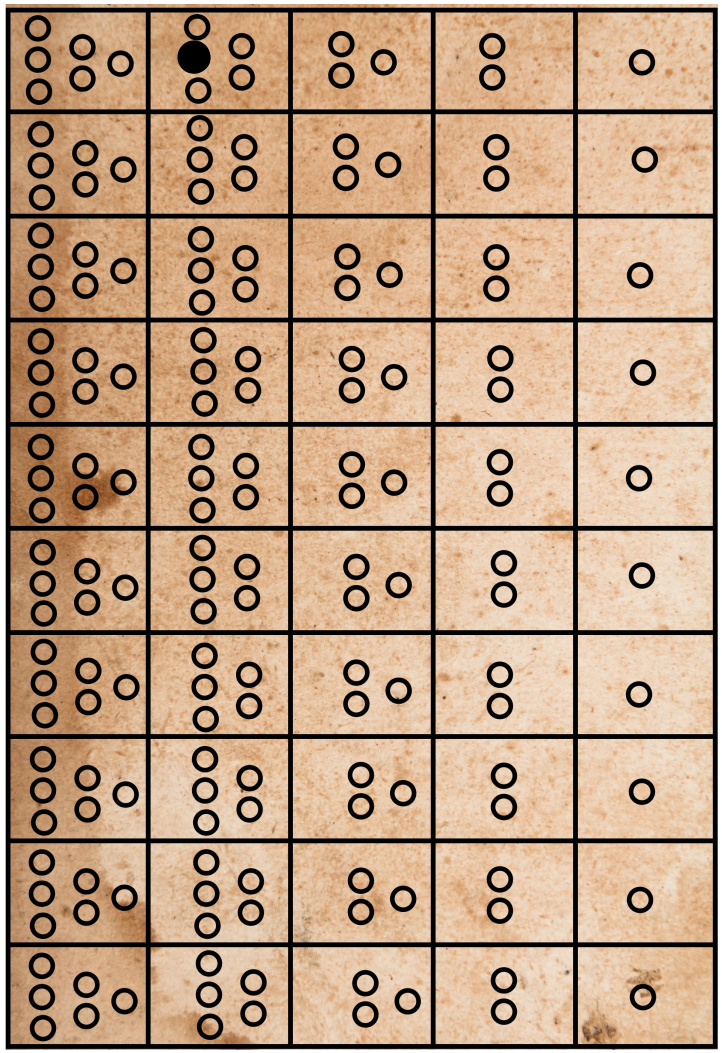


Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 1000. En la yupana acabamos de representar con una semilla (ficha circular color negro) un lugar que era cero. Ahora ese lugar ocupa una semilla y el valor que le otorga el cero, hace que sea 1000. Si recordamos en el documento “Nueva crónica, buen gobierno”, describe que enumeraban de cien mil, diez mil, cien, diez hasta llegar a la unidad.

El mil se puede representar y ordenar perfectamente, sin embargo su representación se encuentra dentro de la cuarta dimensión. Esto calza perfectamente con la descripción de Don Huamán Poma de Ayala. Ellos conocían y rotulaban el mil (huaranga), pero este no se encontraba como dimensión, si como orden.

Siguiendo esta misma, la dimensión que le continúa al tablero es la de 6 ceros, que calza perfectamente con la descripción de Huamán Poma de cien mil, o con los manuscritos de Huarochirí de contar miles. No siguiendo una progresión Fibonacci como algunos teóricos sostienen, si no una progresión de inclusión órdenes, llamado aquí progresión ayllu que son criterios de pertenencia.

# 1000



Esta yupana matriz, también llamada Soto Inka o yupana Huarochirana, parecería más compleja en estructura, si la comparamos con la estructura de Don Huamán Poma de Ayala, sin embargo, pedagógicamente, es más sencilla de aprender, más importante que cumple con las descripciones de los documentos citados, más importante aún que nos permite decodificar el dibujo de la yupana que se encuentra en el documento ”Nueva crónica y buen gobierno”.

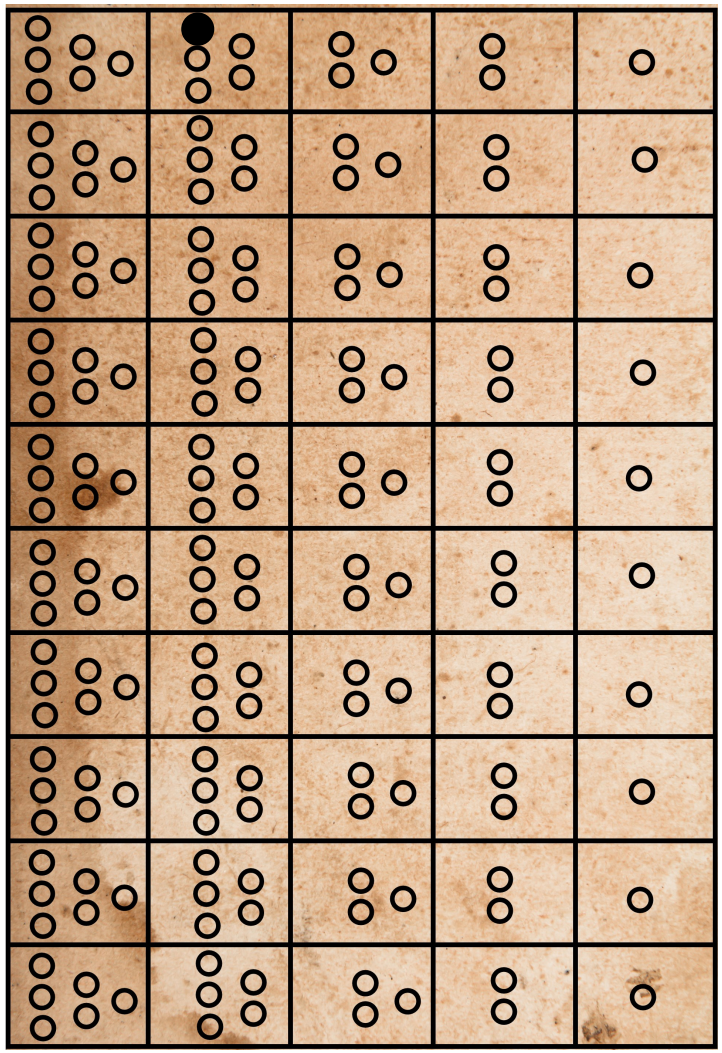
La yupana matriz tiene entonces: 5 dimensiones y pueden ser más, si se junta con otra yupana, se puede explorar los números decimales.

Tiene 10 filas y la semilla cuando se activa le hace cumplir un valor de cardinalidad.

Este tablero, se le puede dar una utilidad pedagógica, pero no es su funcionalidad que se le daba en el uso práctico, era utilizado por contadores, que conocían acerca de los números y otros conceptos relacionados a ellos.

Otro material, llamado taptana, tiene el potencial para ser el medio para adquirir los conocimientos esenciales para, luego usar la yupana.

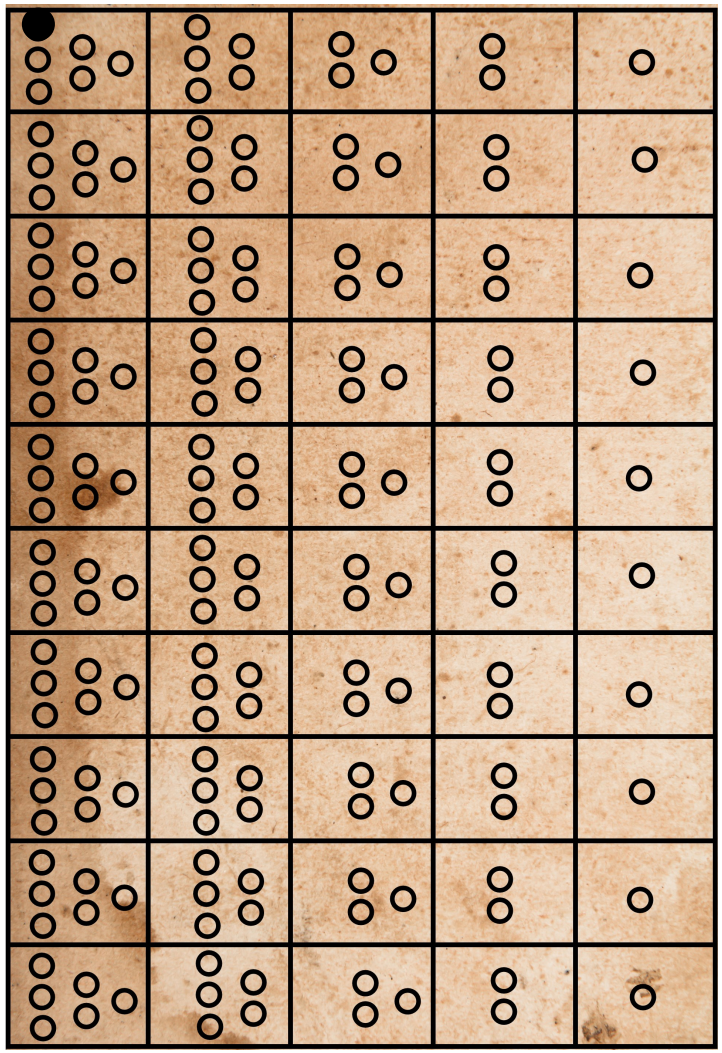
# 10 000



Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 10 000

En la yupana acabamos de representar con una semilla, un lugar que era cero. Ahora ese lugar ocupa una semilla y el valor que le otorga el cero, hace que sea 10 000.

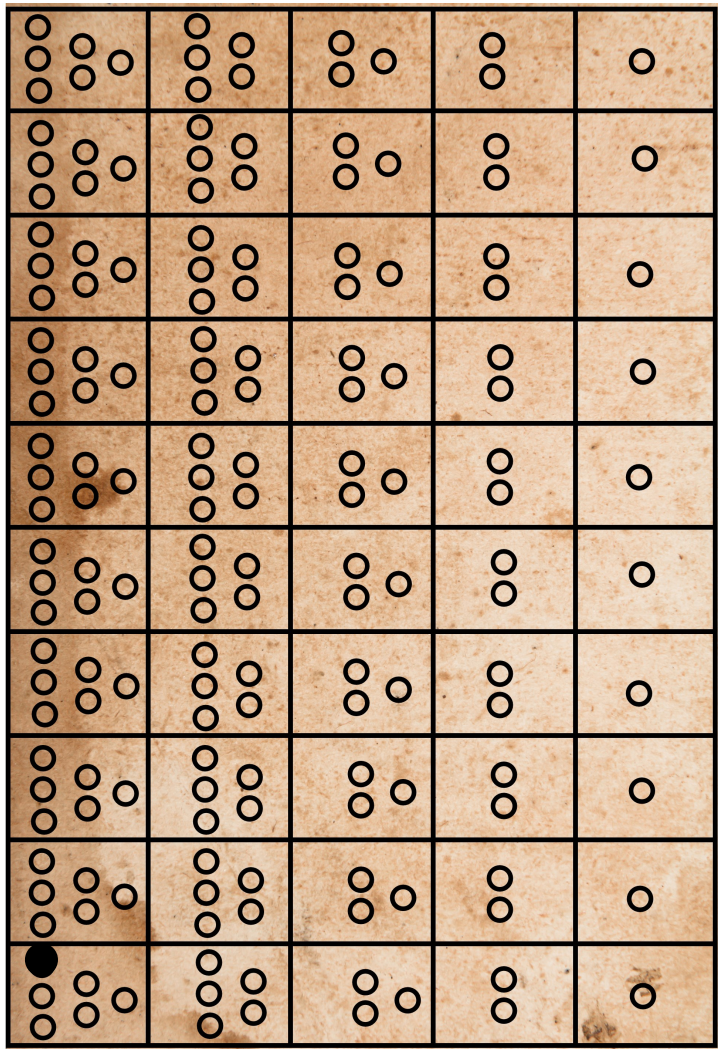
# 100 000



Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 100 000.

En la yupana acabamos de representar con una semilla, un lugar que era cero. Ahora ese lugar ocupa una semilla y el valor que le otorga el cero, hace que sea 100 000.

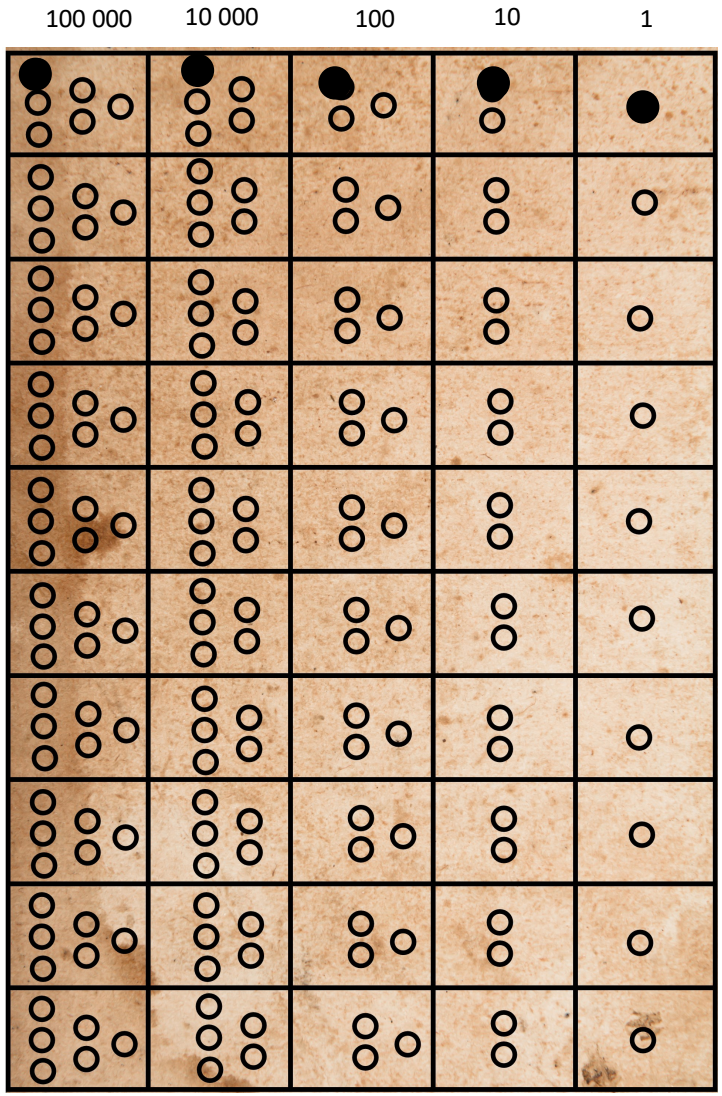
# 1 000 000



Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 1 000 000.

En la yupana acabamos de representar con una semilla, un lugar que era cero. Ahora ese lugar ocupa una semilla y el valor que le otorga el cero, hace que sea 1 000 000.

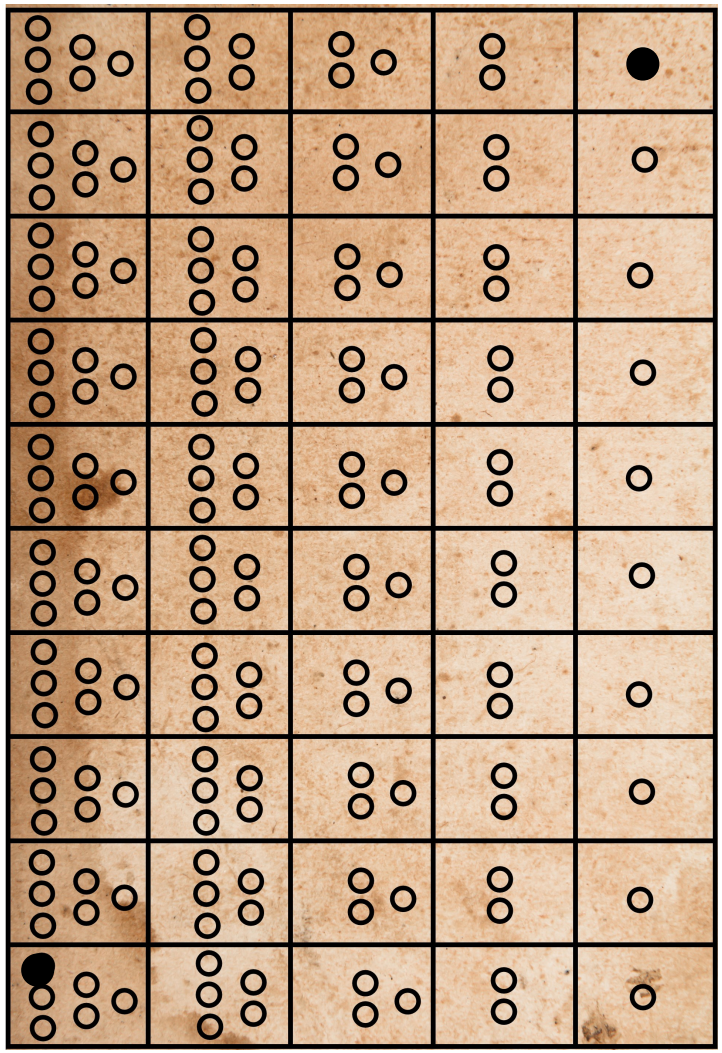
# Del 100 al 10 000




En el documento “Nueva Crónica, Buen gobierno” de Huamán Poma de Ayala, vemos que cuando numeran los contadores andinos, quipucamayoc, representan de 1, 10, 100 , 10 000, 100 000. Como vemos esta descripción calza completamente con la estructura de la yupana matriz.

Obsérvese cada semilla como asume un rol, al remplazar el cero. Si baja cada semilla un recuadro representa el valor relativo de dos en cada orden de la dimensión.

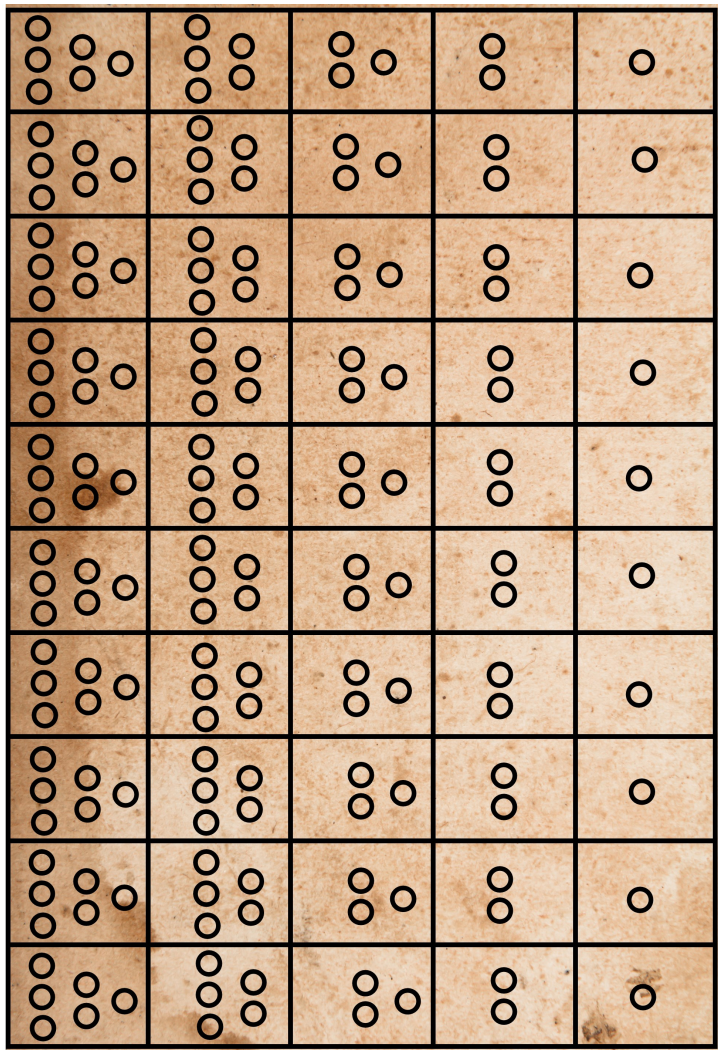
# CÓMO OBTENER NÚMEROS MÁS GRANDES



Utilizando las semillas vamos a representar los números, por ejemplo, el número 1 000 001.

En la yupana acabamos de representar con una semilla (ficha circular color negro) un lugar que era cero. Ahora ese lugar ocupa una semilla que se encuentra en el primer lugar , del mismo modo una semilla en un lugar del tablero, nos permite representar un millón.

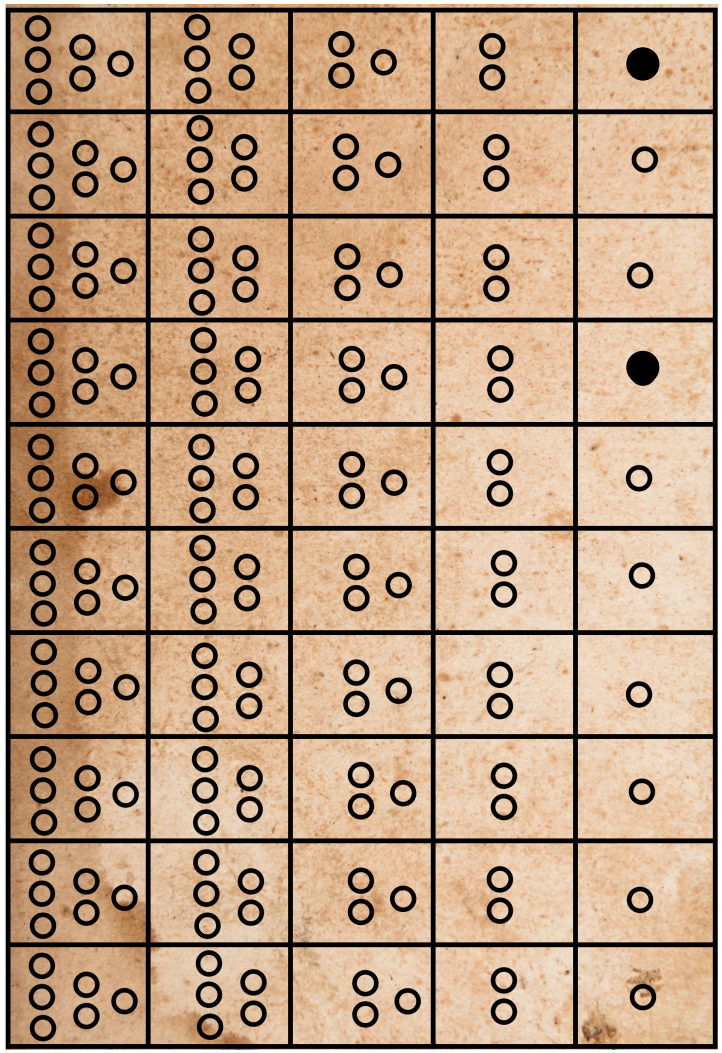
# EL CERO



Para saber si las culturas ancestrales utilizaban el cero, deben cumplir con lo siguiente. Pero qué significa el cero, cómo saber que una civilización lo ha descubierto. Esencialmente el cero como constructo quien lo usa debe saber que el cero tiene el potencial de que si acompaña a un número modifica el valor general del número. Debe existir una forma de codificar al cero: con un dibujo, material concreto, etc. También que el cero tiene un valor intrínseco más allá del símbolo, es decir comparte junto a los otros números ser un elemento del grupo. Esto también se puede ver cuando su ausencia significa algo más que solo vacío o que no hay algo, una ausencia de un orden determinado.

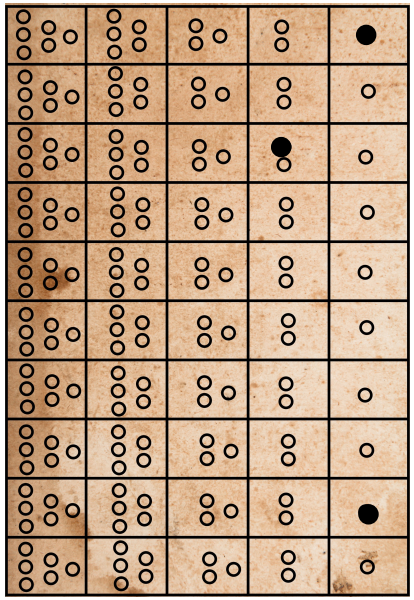
El cero tiene un valor por si mismo y tiene el potencial de modificar al número que acompaña. En la yupana al ser representado como un círculo e interactuar con la semilla que tiene un carácter simbólico podría pensarse que actúa como vacío, pero en la matriz tiene un significado en cada orden que se encuentra, muy diferente en cada dimensión que ocupa. Tiene un símbolo de representación. Es sí, sorprendente ver una matriz de muchos ceros, es como ver un tablero dentro de un tablero y dentro de otro en sincronización como un panal de abeja.

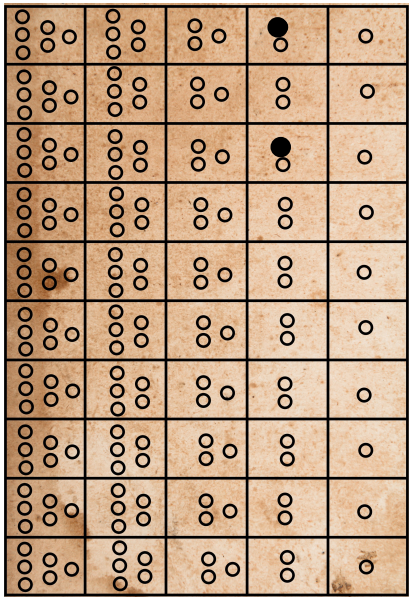
# OPERACIONES ARITMÉTICAS: ADICIÓN SIN REAGRUPAR

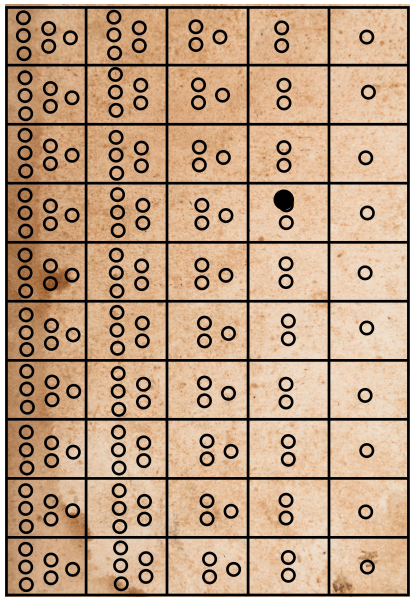


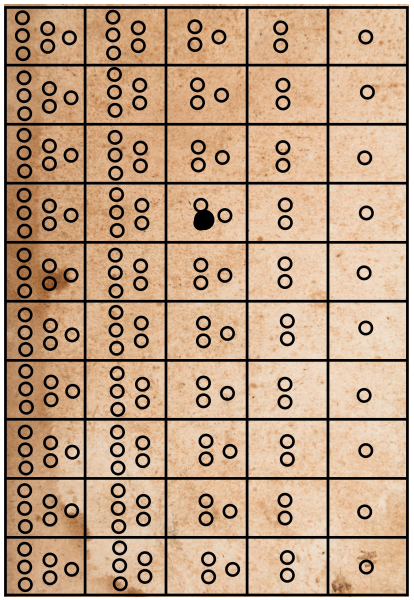
En la imagen, se representa la adición de 1 +4, esto se puede representar con una sola semilla en la dimensión 1 y cardinal 5.

# ADICIÓN REAGRUPANDO





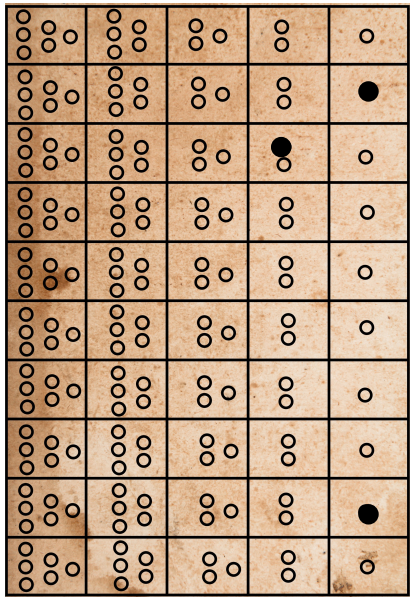


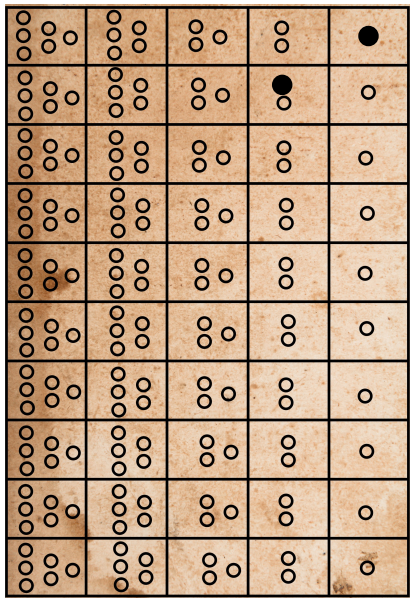


En la imagen se representa la adición de 30 + 1 + 9, luego se agrupa el 9+ 1 como 1 decena, luego vemos en la siguiente imagen, el la dimensión 2, 1 decena y 3 decenas, esto podemos aún simplificarlo, representándolo solo con una semilla que representa el cardinal de 40.

Con el principio de multirepresentación, se puede formar el 40 de diferentes formas en su estructura de 10, pero siempre se buscará la manera más eficiente de hacerlo y con la mejor claridad de representación para su operacionalización.

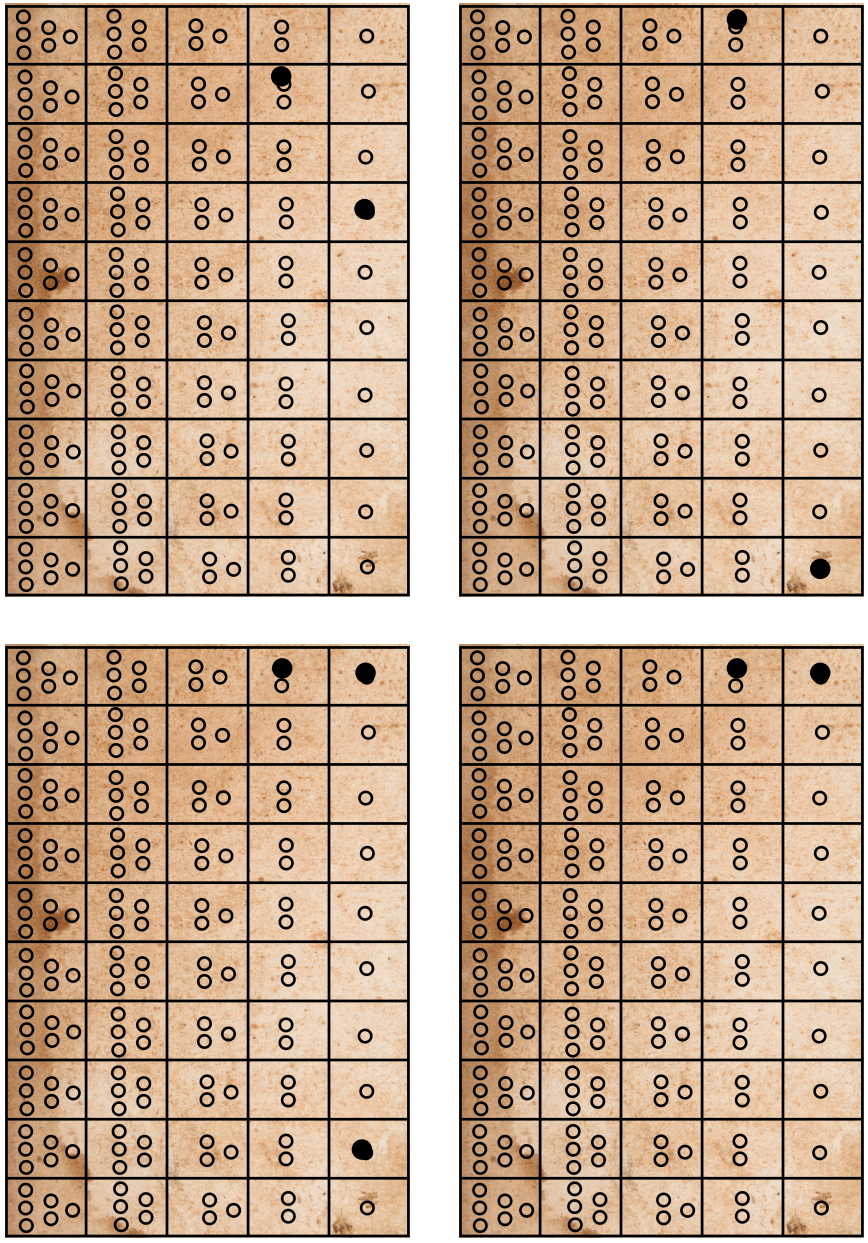
# SUSTRACCIÓN SIN REAGRUPAR





Se representa el 32 y se le quita 11, a cada grupo se le quita una unidad equivalente a su dimensión y orden, se puede visualizar que es muy sencillo hacerlo a través del movimiento e ir encontrando patrones.

# SUSTRACCIÓN REAGRUPANDO



Se opera 24 –9, obsérvese en la primera imagen la representación del 24. el 9 no se representa con otro material porque el 9 se encuentra ya representado dentro del 24.

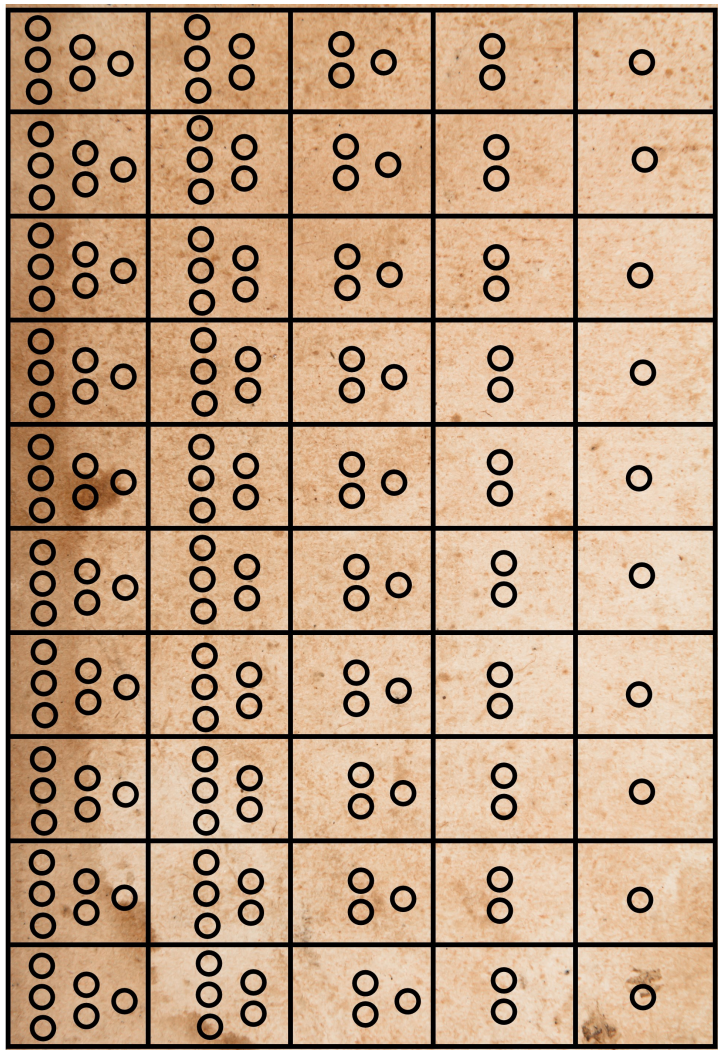
El procedimiento a utilizar es la descomposición. Descomponemos el veinte como dos diez. En el tablero es sencillo de visualizar en el movimiento: la semilla que tiene el valor de 20, retrocede una posición convirtiéndose en 10 en la segunda dimensión, luego el otro 10 se representa en la dimensión 1.

Este 10 de la dimensión 1, se descompone como un 1 y 9 (recuérdese el nombre de 9 en asháninka que nos sugiere una ruta sobre la estructura de una matriz de diez)

En la figura 3, es sencillo poder quitar 9 unidades. Quedándonos en la figura 4, una decena y una unidad.

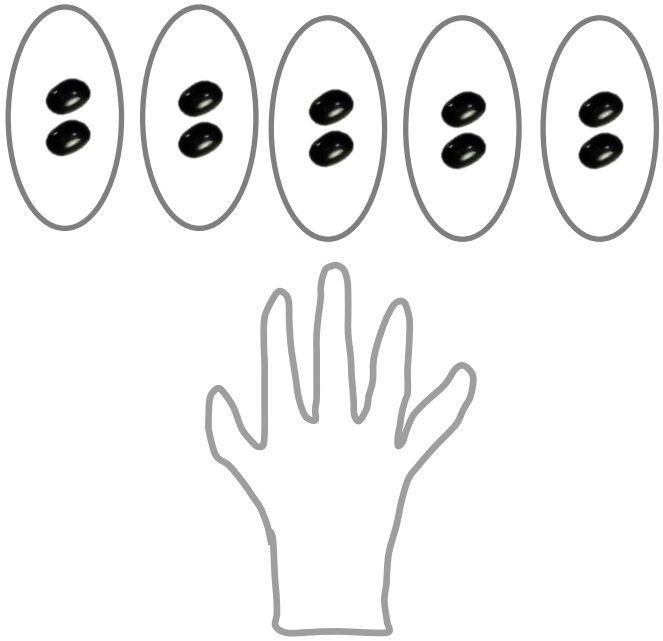
Esta forma de operar, es sencilla de conseguir en el tablero a través de movimientos. Se desprende que quien lo operaba sabía descomponer el 10 muy bien, de esto exploraremos más adelante. El mismo procedimiento se usa para operar la yupana de Huamán Poma de Ayala.

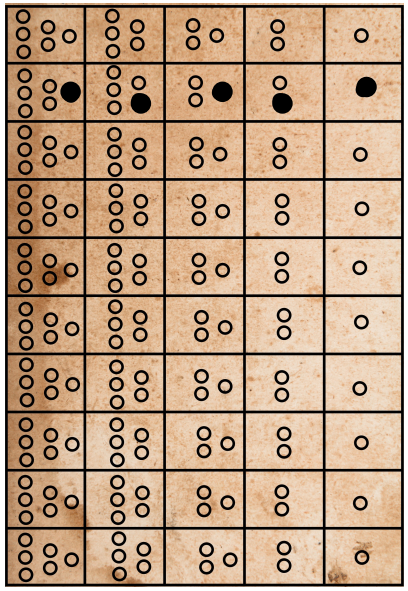
# MULTIPLICACIÓN



Desde un análisis pedagógico, la yupana matriz, no es un material para empezar a construir conceptos básicos o fundamentales y sus relaciones, para operar las multiplicaciones ya se deben tener los conceptos fundamentales construidos: conceptos de cardinal, de orden, de cero, dimensiones, de multirepresentación. No es un material para comenzar a construir la noción de multiplicación. Para construir estos conceptos fundamentales, se pueden utilizar semillas o una taptana y semillas que tienen el potencial para crear situaciones significativas para su aprendizaje. Recordemos que el número no era representado como en occidente con un símbolo arábigo y con tinta y papel; el número era representado, por nuestros ancestros, en un espacio y tiempo, es decir, en movimiento con el uso de la yupana. Por ejemplo, una interpretación de cómo se construyó la multiplicación del 2  a partir de conceptos básicas, utilizando semillas, hasta llegar a operarse en la yupana matriz. En la imagen observamos grupos de dos: iskay, iskay, iskay, iskay, iskay.

# MULTIPLICACIÓN



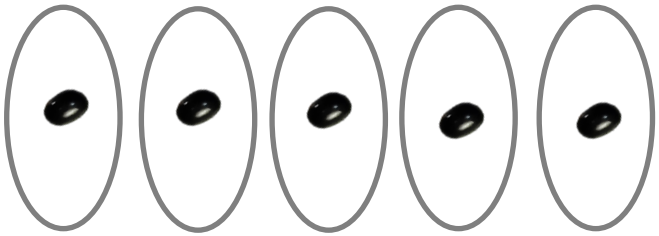


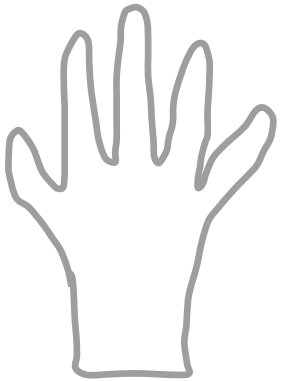
Imaginemos cómo concibieron nuestros ancestros las primeras relaciones de multiplicación. La noción de grupos iguales, por ejemplo, contemos: iskay, iskay, iskay, iskay, iskay. Hay pisqa grupos de iskay (hay cinco grupos de dos). Los dedos de una mano siempre son pisqa (5), por lo que pudo haber ayudado a interiorizar en lo que llamamos memoria matemática que pisqa grupos de iskay es chunka (5 x2 es 10). Este chunka (10), además de ser un número antes que el 9, es una relación entre 5 grupos de 2 semillas. Aquí, podemos observar el cardinal de cada grupo, cada semilla representa una unidad.

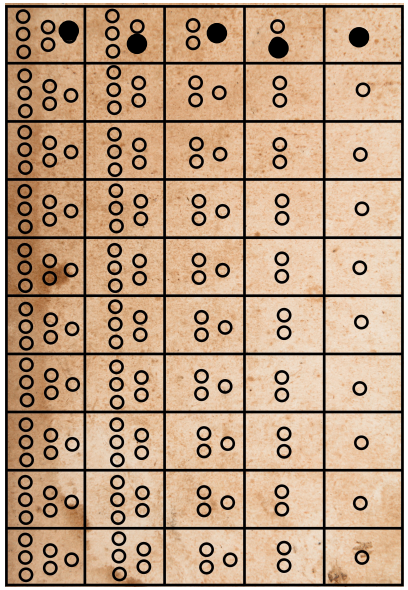
En la figura 2, podemos ver que la estructura de la yupana nos facilita comprender y ordenar la multiplicación del 2, siempre y cuando se haya explorado antes la noción de grupos como en la figura 1.

Entonces en la yupana sumamos iskay + iskay + iskay + iskay+ iskay y lo representamos como chunka (10). La memoria matemática nos ayudará a saber que a través del movimiento se sumar todos los grupos iguales de dos (en la yupana) nos dará siempre chunka.

# MULTIPLICACIÓN







En la figura 1, se representan pisqa grupos de huk (5 grupos de uno), lo podemos relacionar con la mano. Si sumamos todos esos grupos que tienen la misma cantidad, el total será pisqa (5).

Podemos representar también el huk (uno), en cada una de las dimensiones. La memoria matemática de nuestros contadores, les ayudará a relacionar que cuando representen todas las unidades en una fila y las sumen, el resultado siempre será pisqa (cinco).

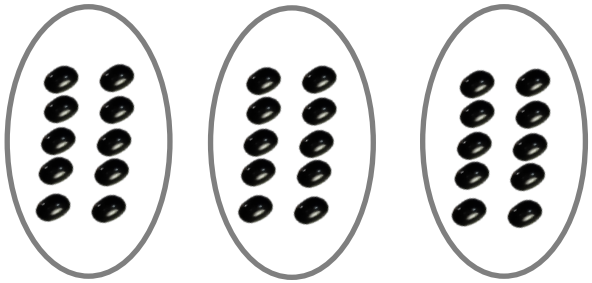
Como vemos se puede explorar de esta misma forma las tablas hasta el 10; es más, si se trabaja con el tablero y las semillas, se puede encontrar de manera muy rápida patrones, por ejemplo para multiplicar el 6x5, pero también hacia adelante como 6x9, 6x13, 6x18, etc. Todo ello con un patrón de predecir el movimiento de una semilla u otra. La memoria matemática, viene a ser aquella información cristalizada de un número, en un espacio y tiempo. Así, cuando nuestros ancestros tenían:

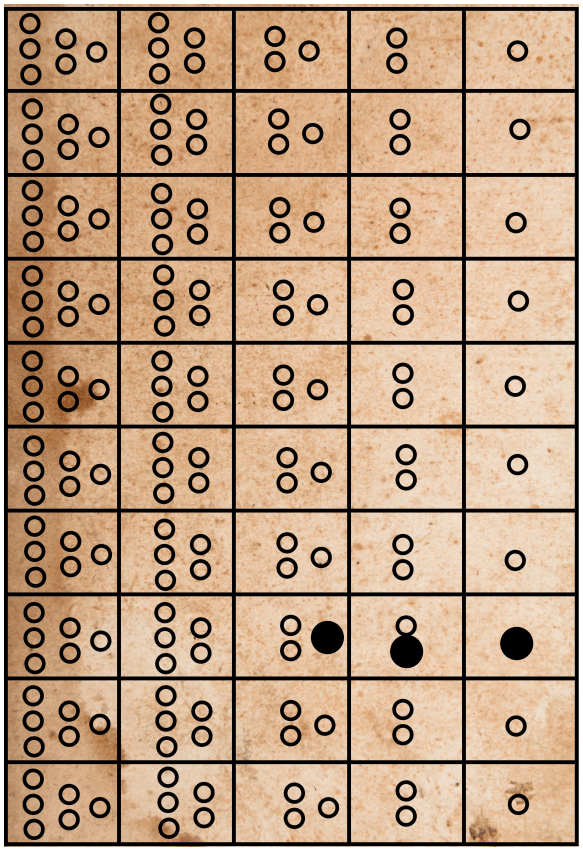
Pisqa grupos de kimsa es chunka pisqayuq (cinco grupos de tres es quince).

Pisqa grupos de tawa es iskay chunka (cinco grupos de cuatro es veinte).

La memoria matemática les va dando recursos para operar grandes cantidades.

# MULTIPLICACIÓN

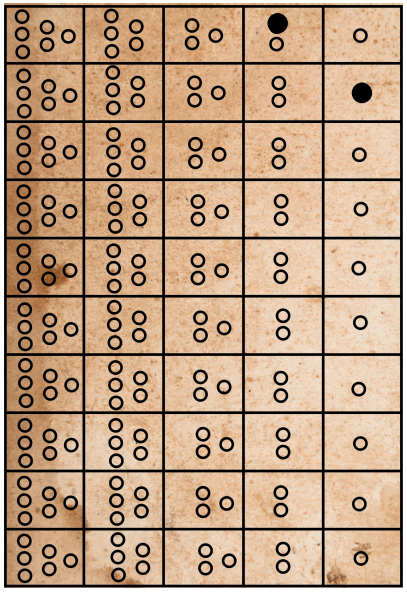


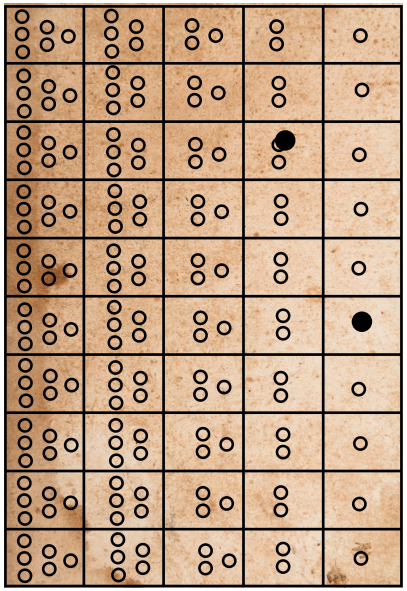


La yupana permite estructurar esas relaciones conceptuales: idea de grupo, cardinales de una manera eficiente. Podemos explorar cuánto sería multiplicar kimsa veces tawa (tres por cuatro), representando la suma repetida en la yupana y memorizando esa relación comprendida. También podemos representar tawa veces kimsa (cuatro por tres) y ver que el resultado es el mismo chunka iskayniyoq; sin embargo la estructura de tres por cuatro y cuatro por tres es diferente. Exploramos el cuatro por nueve, el ocho por tres, el diez por cuatro. La yupana es un material para experimentar y encontrar patrones más elaborados.

En la figura 1, observamos una representación donde cada semilla, cumple la función de material concreto. En cambio, en la figura 2, en la yupana matriz, todo ello se simplifica a representar con tres semillas la relación de tres grupos de ocho elementos.

# MULTIPLICACIÓN



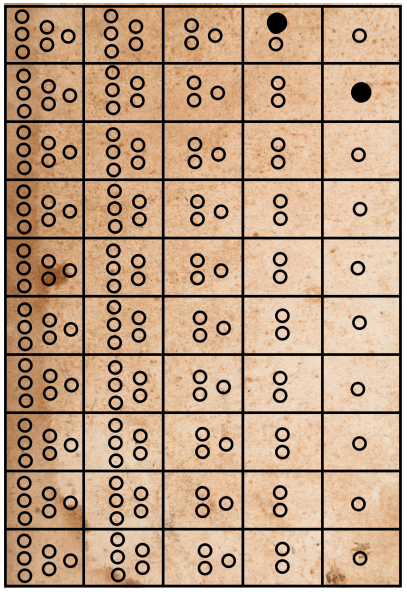


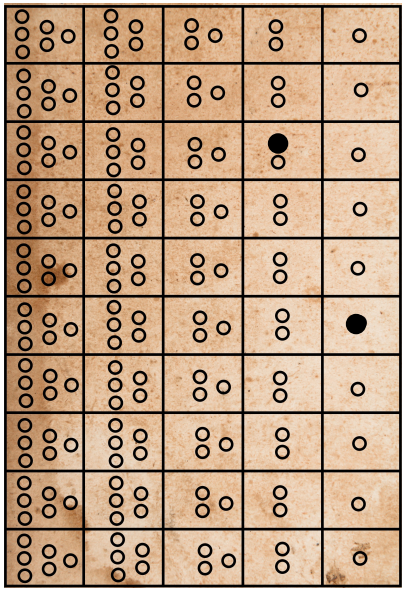
Imaginemos que tenemos que sumar kimsa veces chunka iskayniyoq (tres veces doce). Para entender cómo operaban, tenemos que dejar de utilizar algunos recursos como el símbolo arábigo de 12, la forma cómo operamos mecánicamente; y utilizar la tecnología y conceptos que utilizaban nuestros ancestros como las dimensiones, patrones de movimiento, el cero.

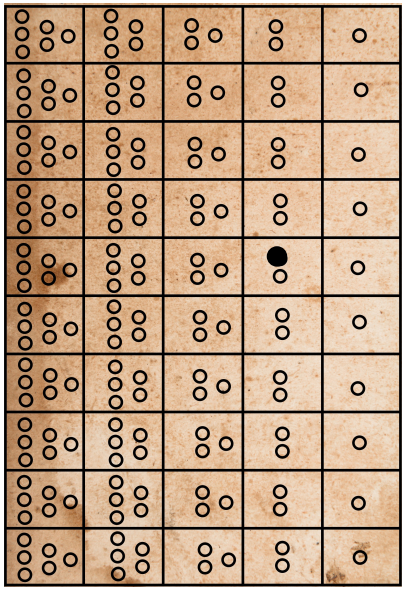
Empezamos representando en la yupana matriz el doce, que claramente es chunka y iskay (chunka iskayniyoq), es decir, es un diez y un dos. Vamos crear tres grupos de iskay y tres grupos de chunka (tres grupos de 10 o una decena y tres grupos de 2). La resolución sería muy sencilla, con la memoria matemática, no haría falta sumar repetidamente los números porque ya se comprendió y sabe el resultado. En la figura 1, se encuentra la representación e doce.

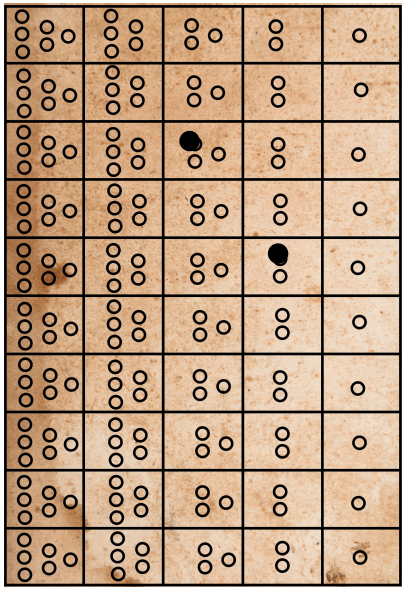
En la figura 2, se representa 3 grupos de 2 es 6; mientras 3 grupos de 10 es 30. Cada semilla tiene un valor y este valor se multiplica.

# MULTIPLICACIÓN









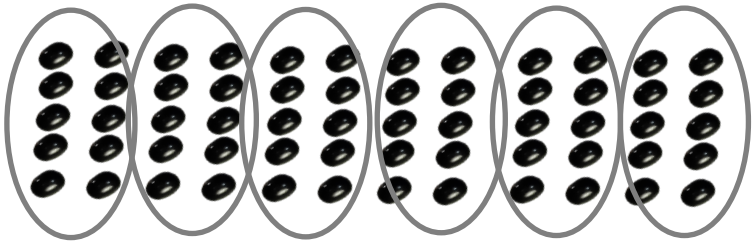
Vamos a explorar la multiplicación de chunka iskayniyoq por kimsa chunka (12 x 30). En la figura 1, se representa el 12, luego multiplicamos primero por 3, luego por 10, esto es, con nuestra memoria matemática, el proceso es muy sencillo. En la figura 2, se multiplican las unidades y decenas.

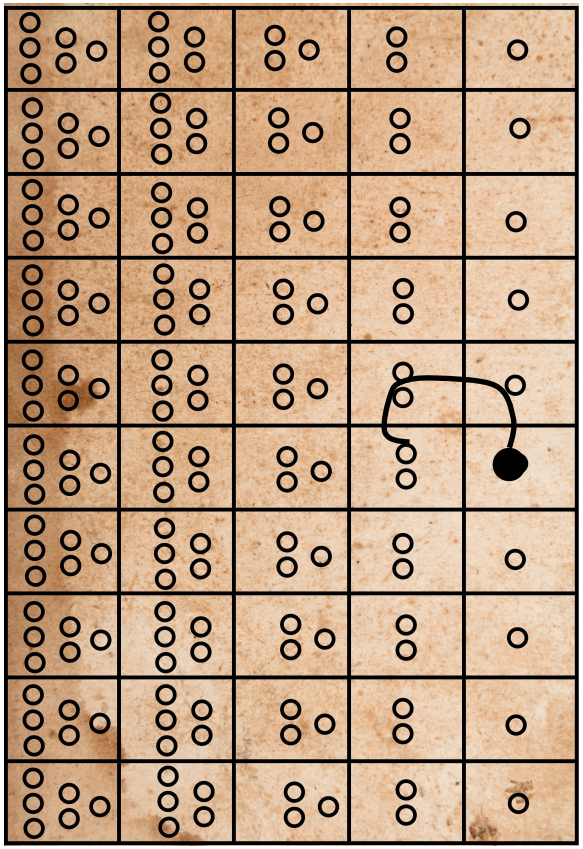
En la figura tres vamos a multiplicar el resultado que tenemos hasta ahora que es 36 por 10, nuevamente la memoria matemática nos indica que si queremos multiplicar por diez debemos mover cada orden hacia la siguiente dimensión en un nuevo orden.

En la figura 3. observamos como el 6, es representado ahora como 60. En la figura 4. observamos como el 30 se convierte en 300. Teniendo así, un total de 360.

Para ello no se ha recurrido a símbolos (como los arábigos), porque se cuenta con una tecnología diferente que permite representar y relacionar las cantidades a través del movimiento y la función que cumple el cero en cada dimensión.

# MULTIPLICACIÓN





En la figura 1. se representa 6 grupos de 10 para explorar las relaciones que ocurren cuando multiplicamos por grupos de 10.

En la yupana observamos que si representamos el 6 que representa el número de grupos multiplicados por diez para hallar la respuesta siempre se moverá hacia la izquierda en la segunda dimensión. Si multiplicamos por pacha (100) se moverá 2 espacios hacia la izquierda en la dimensión que le corresponde. Encontrándose entonces las relaciones y patrones de movimiento que serán parte de su memoria matemática.

# MULTIPLICACIÓN

Figura 1.

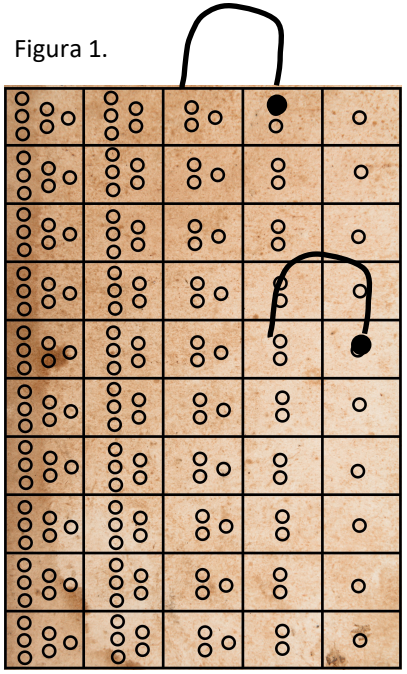
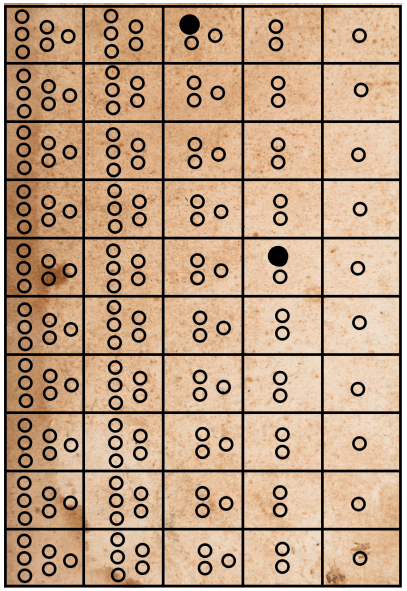


Figura 2.



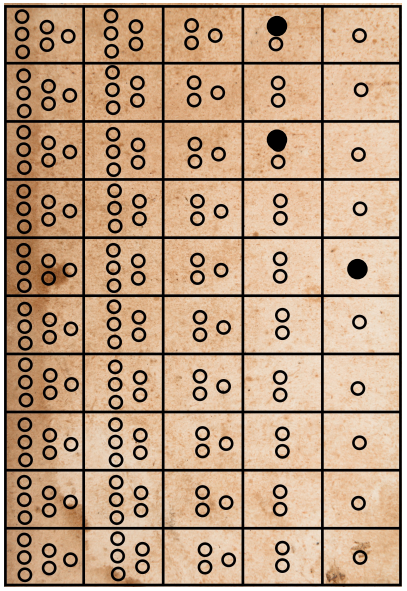


Figura 3.

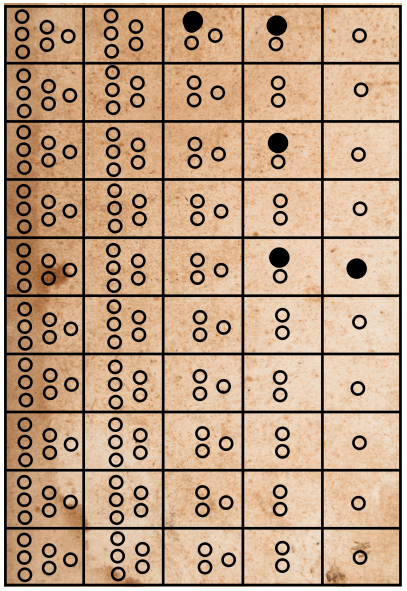


Figura 4.

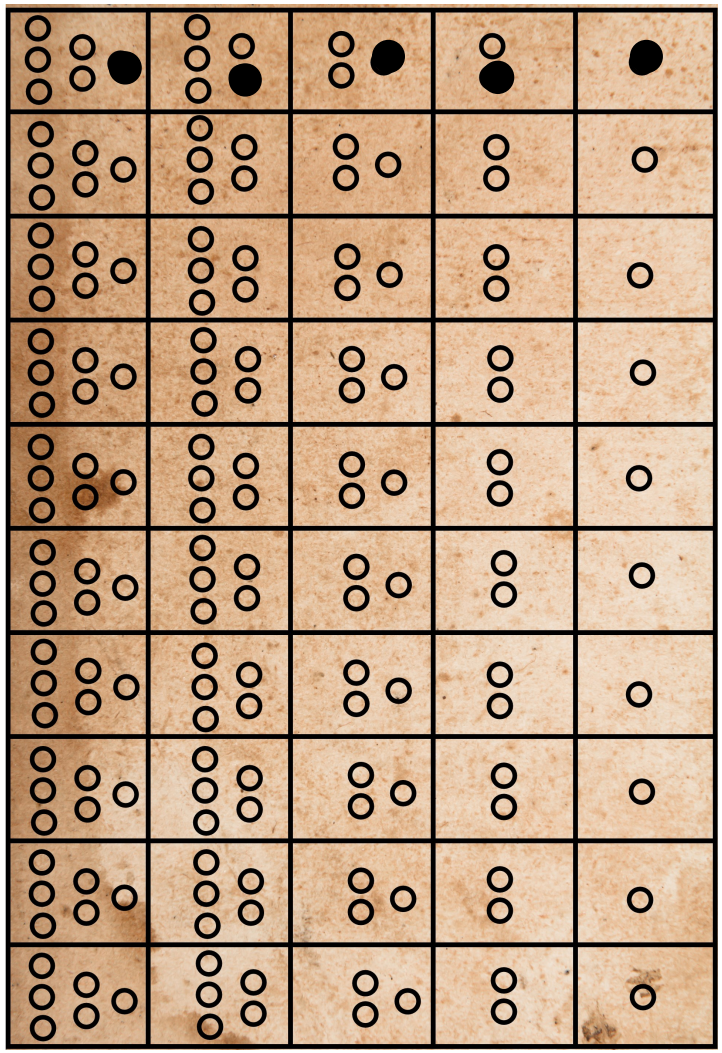
Multipliquemos el 15 x 13 =, primero multiplicamos el 15 por el 10, luego el 15 por el 3, al final todo lo que nos quede de la operación, lo sumamos. En la figura 1, se representa el 15.

En la figura 2 se ha multiplicado ya el 15 x 10 (nótese que se ha movido cada número a la siguiente columna en una nueva dimensión y orden), pudiéndose observar en el tablero el total de 150.

En la figura 3, se multiplica el 15 x 3 (por motivos didácticos no dibujamos los botones de la figura 2, pero deben estar allí). Es muy sencillo, multiplicamos 3 veces 5 y 3 veces el 10: 3x5=15, 3x10= 30, se suma y hace un total de 45.

En la figura 4 se representa la representación de la figura 2. y la figura 3. para saber el total, dándonos un total de 195. La respuesta, se puede simplificar más y se resuelve a través del movimiento y representación con las semillas.

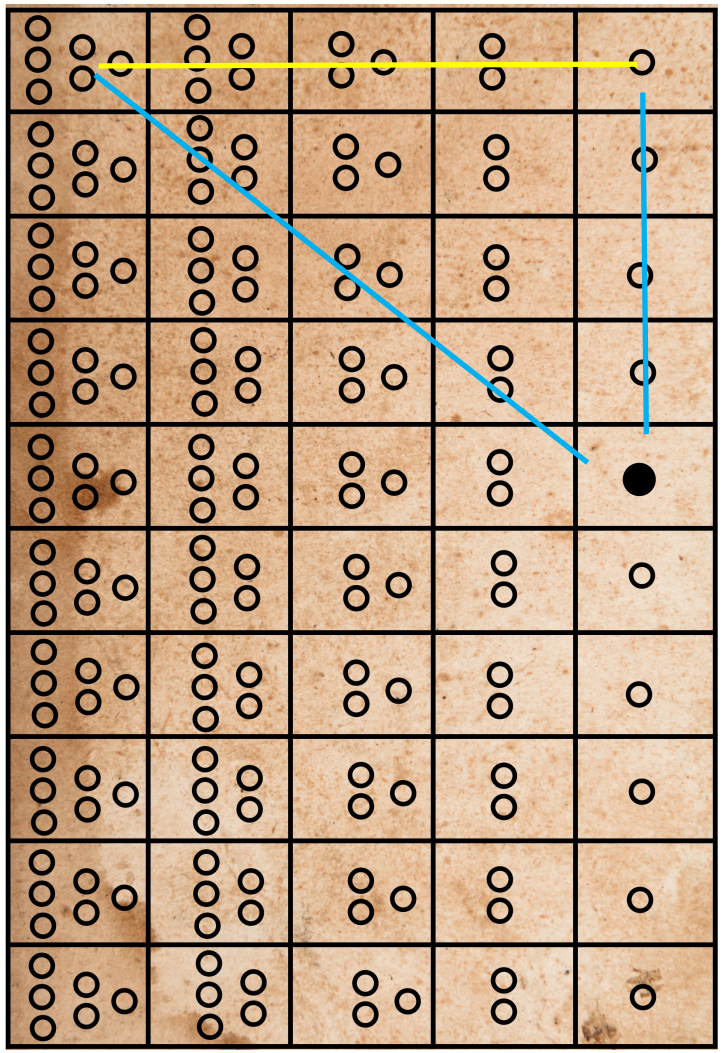
# MULTIPLICACIÓN



Existen muchas formas de multiplicar con este sistema, en esta imagen exploraremos la fundamental que es la relación de grupos y elementos por grupo. Empezaremos comentando que la propiedad de multirepresentación nos facilita comprender este proceso.

Empezaremos representando el uno en todas las dimensiones, así tenemos: 1 +1 +1 +1 +1, esto se le 5 dimensiones de 1 (en nuestro matemática estándar, 5 veces 1 o 5 grupos de 1). Sorprendentemente, el resultado, 5, se puede representar en la dimensión 1 con una sola semilla que representa el cardinal de 5.

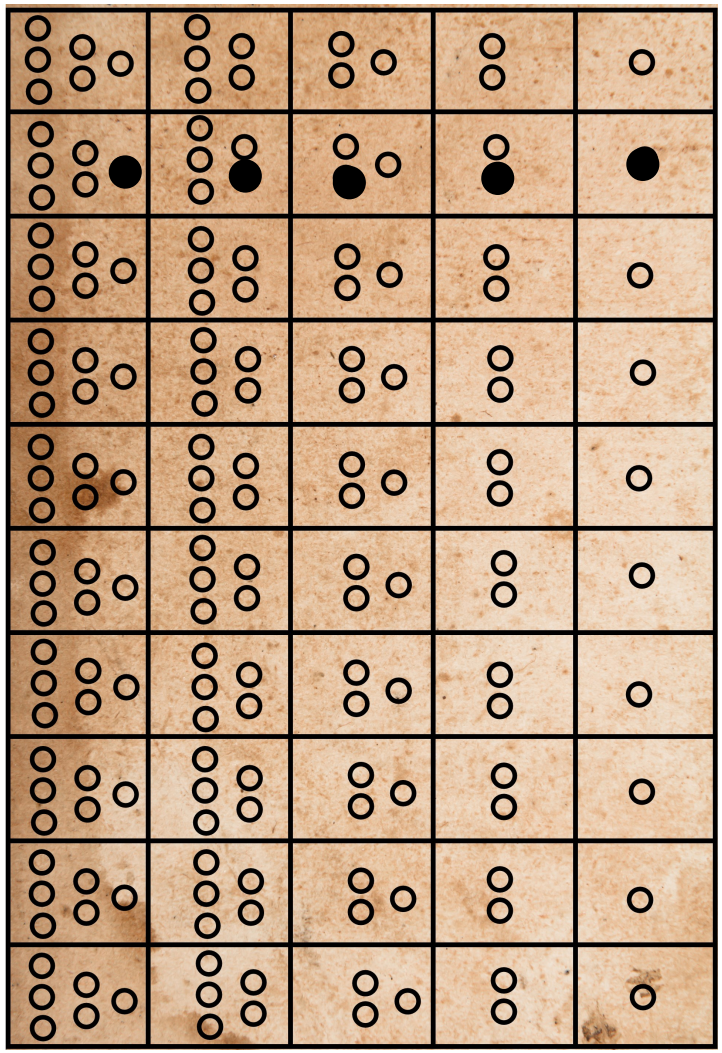
# MULTIPLICACIÓN



Así tenemos: 1 +1 +1 +1 +1 es igual a 5.

Observen como el campo visual de representar muchos unos para luego ser representado solo por el cinco, nos da una pista para luego simplificar la yupana matriz a la yupana de Don Huamán Poma de Ayala, como veremos más adelante.

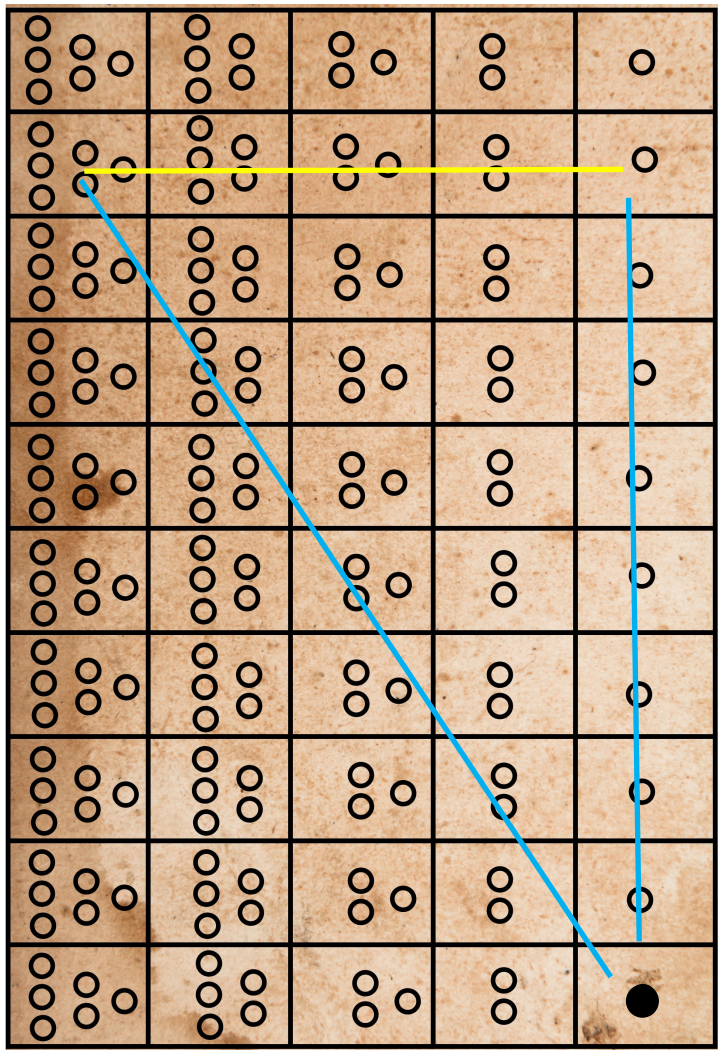
# MULTIPLICACIÓN



Existen muchas formas de multiplicar con este sistema, en esta imagen exploraremos la fundamental que es la relación de grupos y elementos por grupo. Empezaremos comentando que la propiedad de multirepresentación nos facilita comprender este proceso.

Empezaremos representando el dos en todas las dimensiones, así tenemos: 2 +2 +2 +2 +2, esto se le 5 dimensiones de 2 (en nuestro matemática estándar, 5 veces 2 o 5 grupos de 2). Sorprendentemente, el resultado 10, se puede representar en la dimensión 1 con una sola semilla que representa el cardinal de 10.

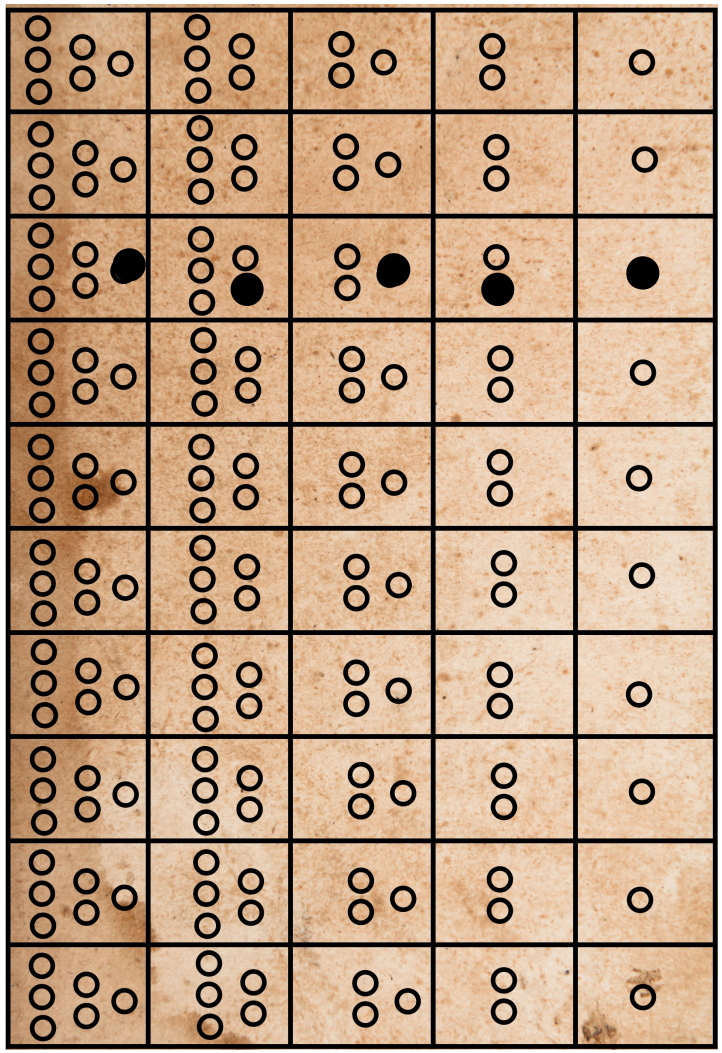
# MULTIPLICACIÓN



Así tenemos: 2 +2 + 2+2 +2 es igual a 10.

Observen como el campo visual de representar muchos unos para luego ser representado solo por el diez, nos da una pista para luego simplificar la yupana matriz a la yupana de Don Huamán Poma de Ayala, como veremos más adelante.

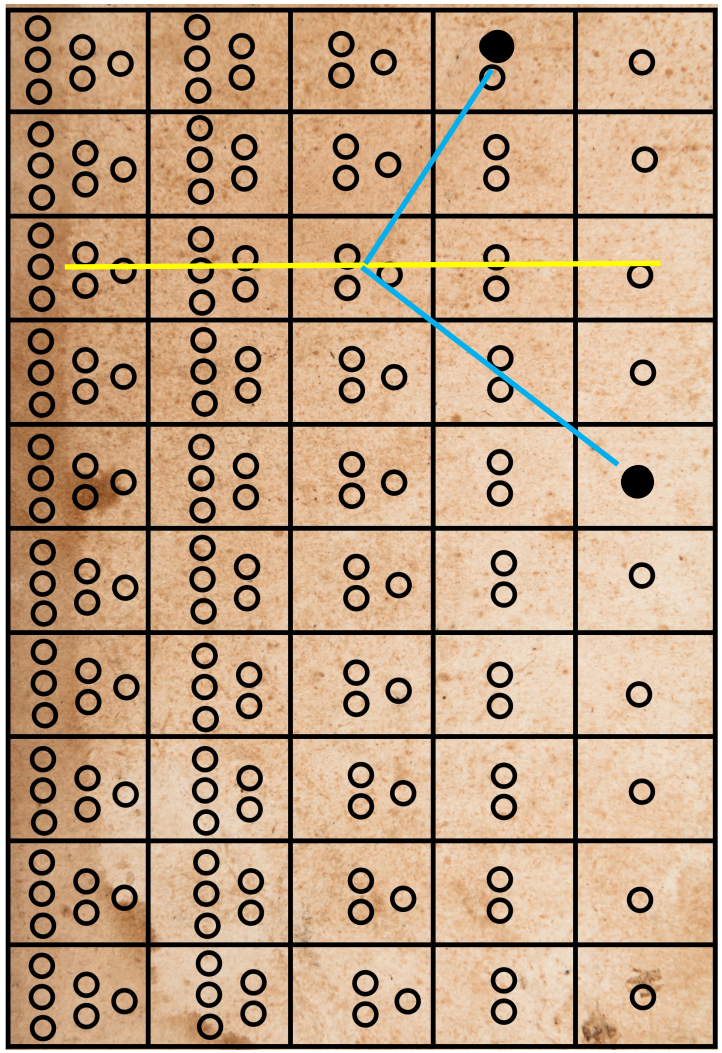
# MULTIPLICACIÓN



Existen muchas formas de multiplicar con este sistema, en esta imagen exploraremos la fundamental que es la relación de grupos y elementos por grupo. Empezaremos comentando que la propiedad de multirepresentación nos facilita comprender este proceso.

Empezaremos representando el dos en todas las dimensiones, así tenemos: 3 +3 +3 +3 +3, esto se le 5 dimensiones de 3 (en nuestro matemática estándar, 5 veces 3 o 5 grupos de 3). Sorprendentemente, el resultado 5, se puede representar en la dimensión 2 con una sola semilla que representa el cardinal de 10 y con una semilla en la dimensión 1, en el cardinal 5.

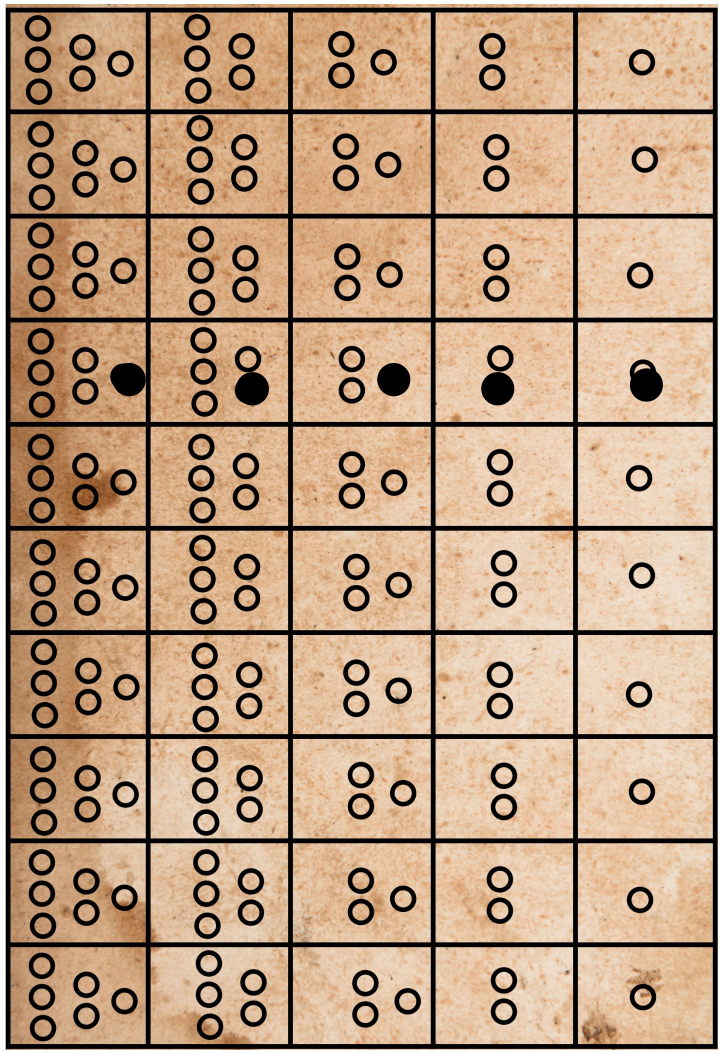
# MULTIPLICACIÓN



Así tenemos: 3 +3 + 3+3 +3 es igual a 15.

Observen como el campo visual de representar muchos unos para luego ser representado solo por el diez, nos da una pista para luego simplificar la yupana matriz a la yupana de Don Huamán Poma de Ayala, como veremos más adelante.

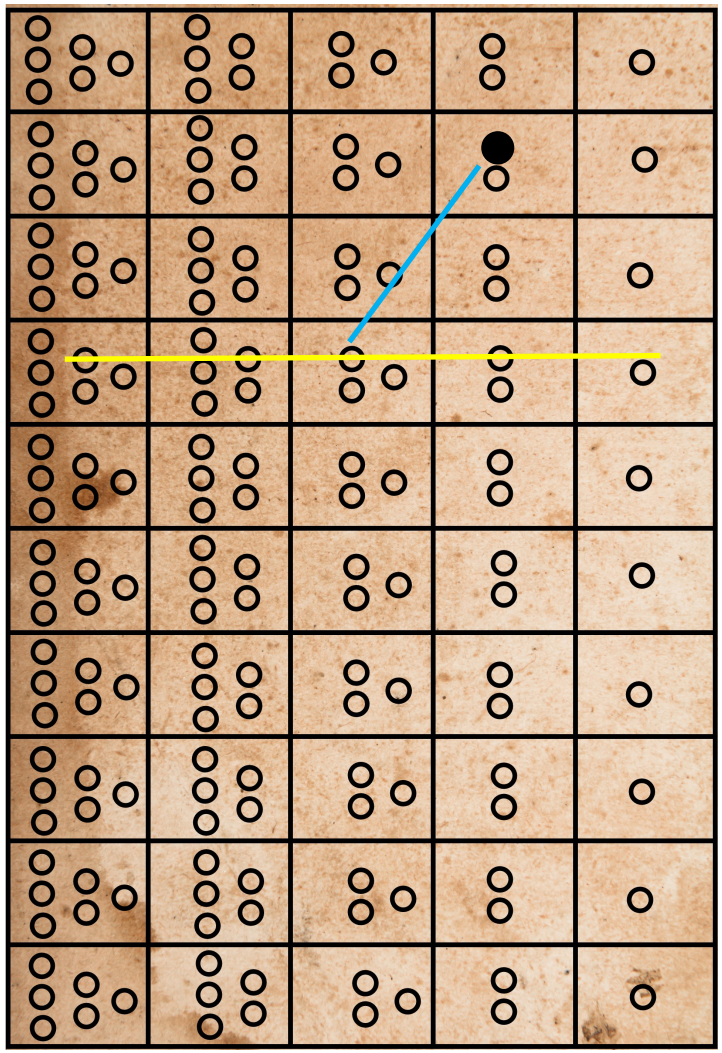
# MULTIPLICACIÓN



Representación multiplicativa del 4 en las 5 dimensiones. Se le como una suma repetida (tabla del 4).

Desde aquí podemos explorar en otras actividades hallar la suma de 4 en 4 dimensiones, la suma de 4 en 3 dimensiones: 5 x4, 4x4, 3x4,2x4, 1x4, 0x4.

# MULTIPLICACIÓN



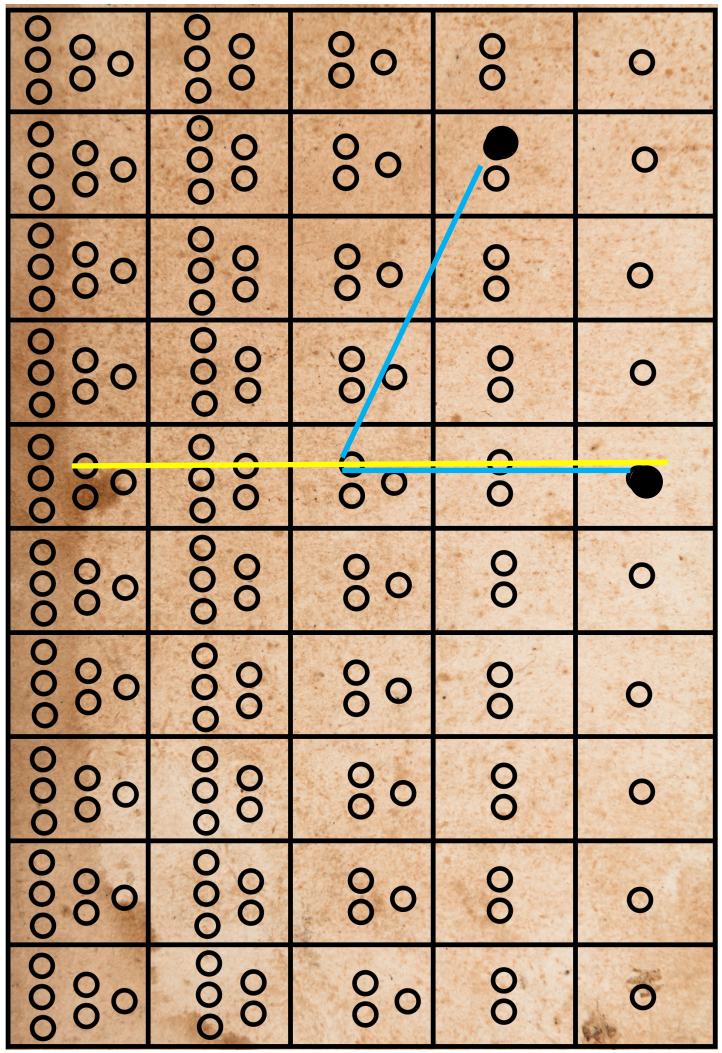
Así tenemos: 4 +4 + 4+4 +4 es igual a 20.

Observen como el campo visual de representar muchos unos para luego ser representado solo por el diez, nos da una pista para luego simplificar la yupana matriz a la yupana de Don Huamán Poma de Ayala, como veremos más adelante.

Tendiendo ya una memoria de lo que es 5 veces 4 y el lugar donde se representa, surge la pregunta ¿y cómo es 6 veces 4? A partir del 20, se le agrega la representación del 4 (total 24) y se sigue está secuencia de 4 en 4.

Todo esto es con el fin de explorar las relaciones multiplicativas, En la segunda parte de este libro se hablará de las formas operativas y cómo hacían grandes cálculos con la yupana matriz.

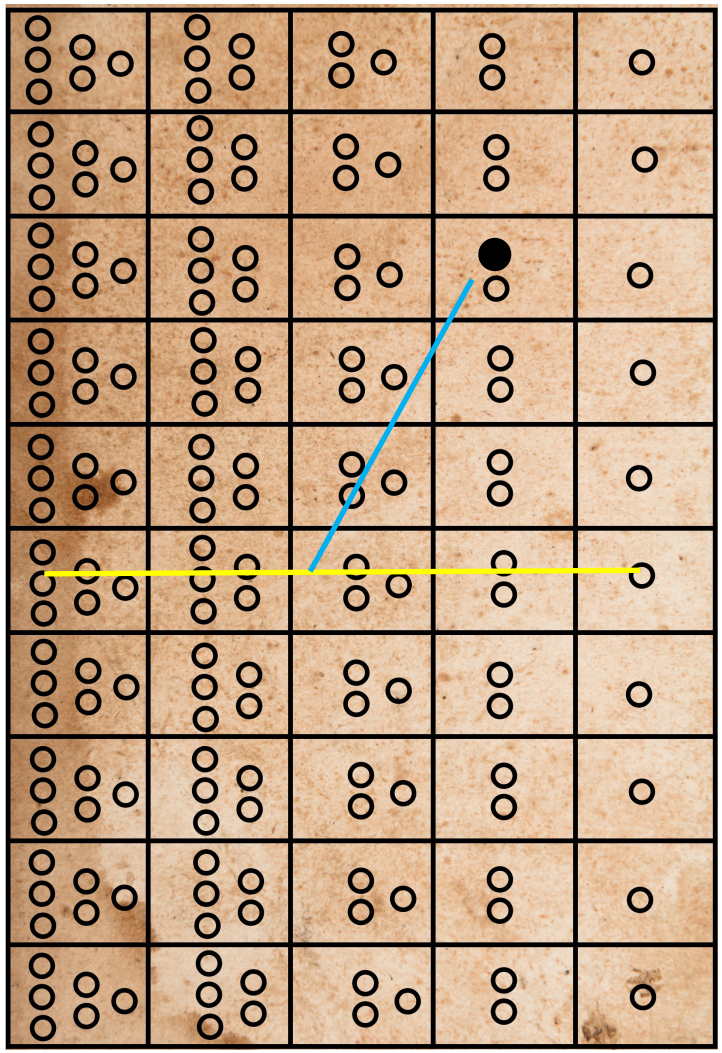
# MULTIPLICACIÓN



Así tenemos: 5 +5 + 5+5 +5 es igual a 25.

Observen como el campo visual de representar muchos unos para luego ser representado solo por el diez, nos da una pista para luego simplificar la yupana matriz a la yupana de Don Huamán Poma de Ayala, como veremos más adelante.

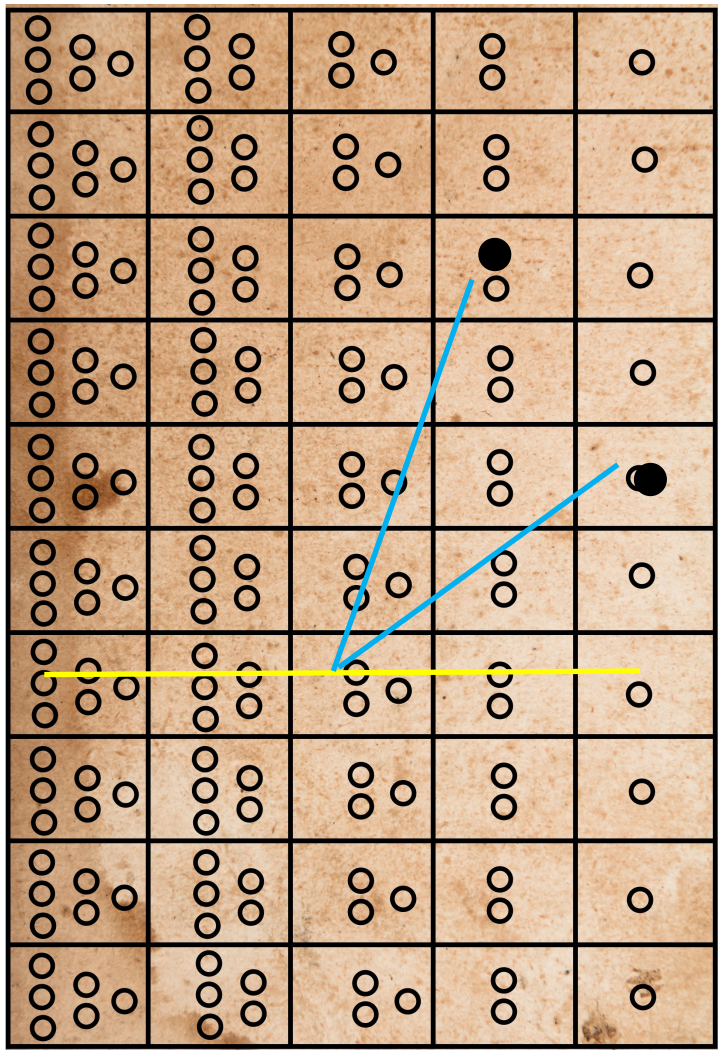
# MULTIPLICACIÓN



Así tenemos: 6 +6 + 6+6 +6 es igual a 30.

Observen como el campo visual de representar muchos unos para luego ser representado solo por el diez, nos da una pista para luego simplificar la yupana matriz a la yupana de Don Huamán Poma de Ayala, como veremos más adelante.

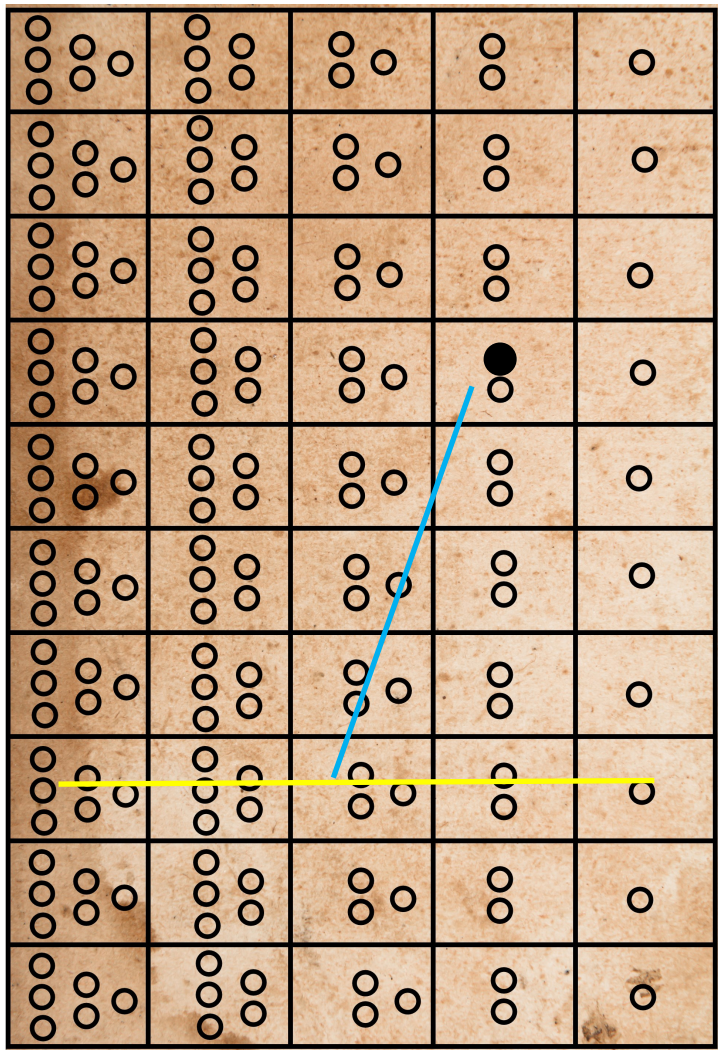
# MULTIPLICACIÓN



Así tenemos: 7 +7 + 7+7 +7 es igual a 35.

Observen como el campo visual de representar muchos unos para luego ser representado solo por el diez, nos da una pista para luego simplificar la yupana matriz a la yupana de Don Huamán Poma de Ayala, como veremos más adelante.

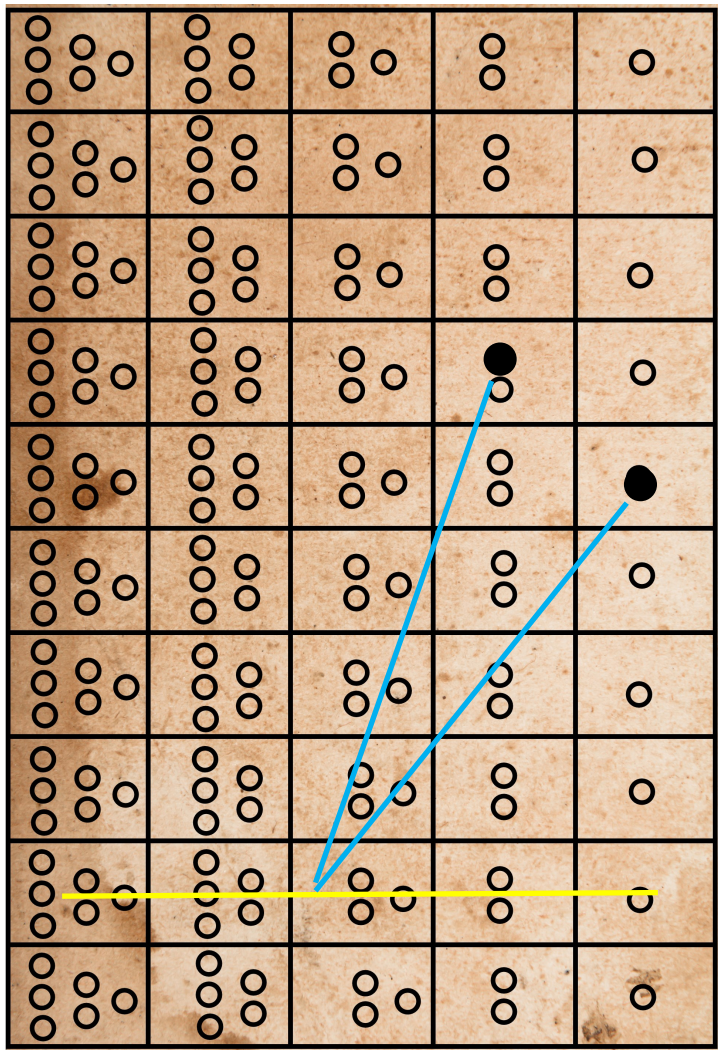
# MULTIPLICACIÓN



Así tenemos: 8 +8 + 8+8 +8 es igual a 40.

Observen como el campo visual de representar muchos unos para luego ser representado solo por el diez, nos da una pista para luego simplificar la yupana matriz a la yupana de Don Huamán Poma de Ayala, como veremos más adelante.

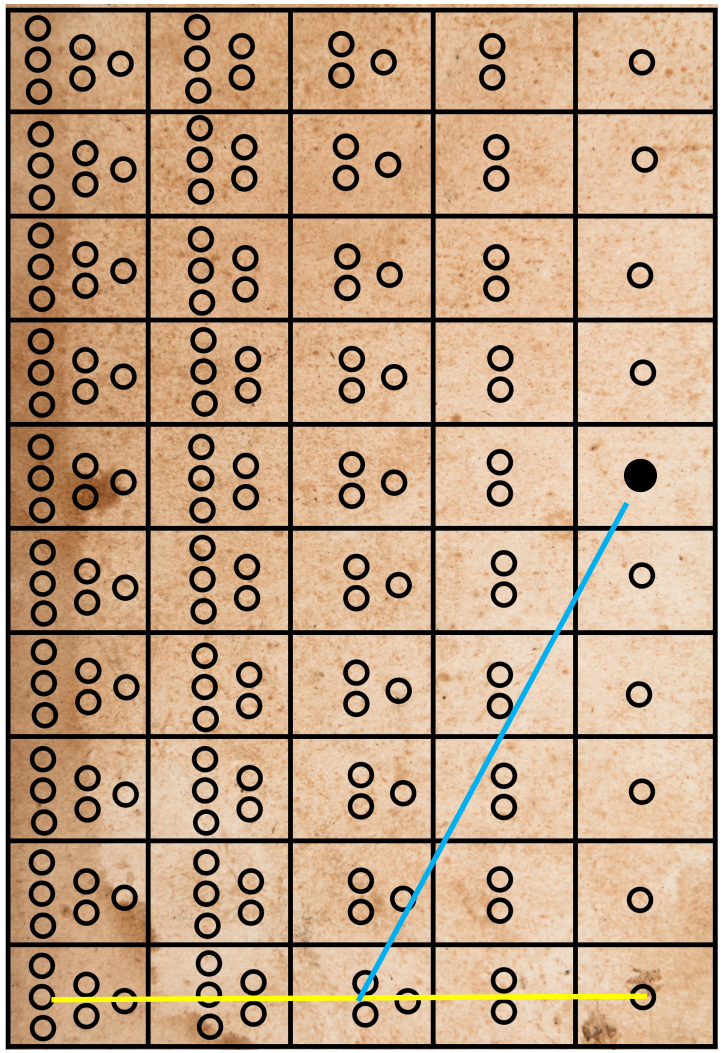
# MULTIPLICACIÓN



Así tenemos: 9 +9+ 9+9 +9 es igual a 45.

Observen como el campo visual de representar muchos unos para luego ser representado solo por el diez, nos da una pista para luego simplificar la yupana matriz a la yupana de Don Huamán Poma de Ayala, como veremos más adelante.

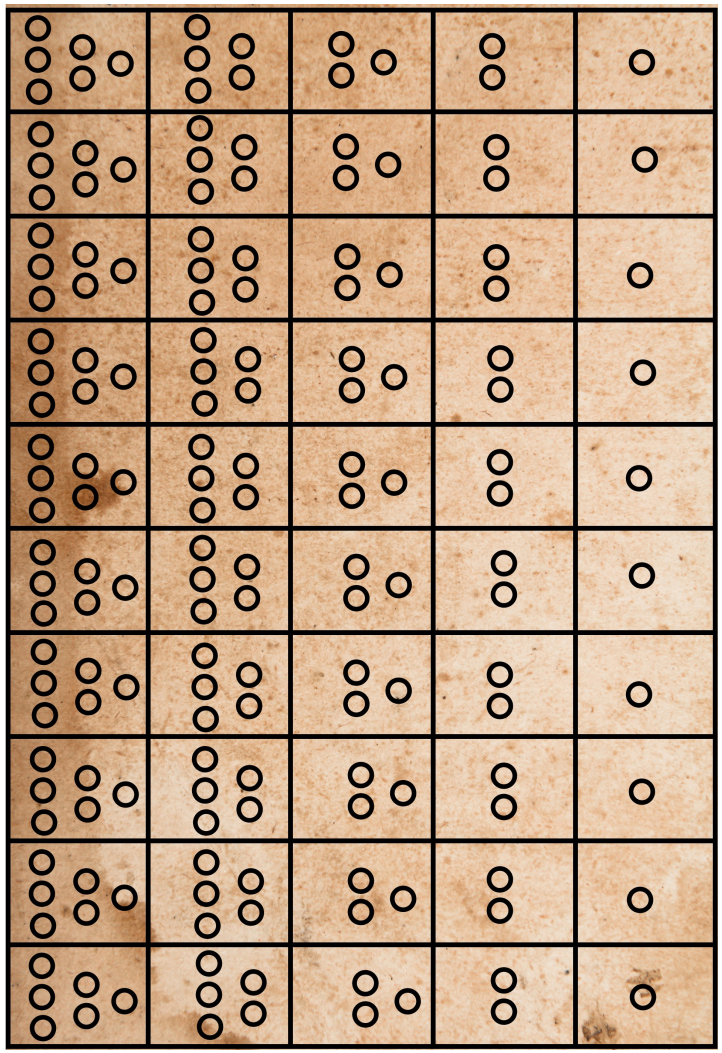
# MULTIPLICACIÓN



Así tenemos: 10 +10 + 10+10 +10 es igual a 50.

Observen como el campo visual de representar muchos unos para luego ser representado solo por el diez, nos da una pista para luego simplificar la yupana matriz a la yupana de Don Huamán Poma de Ayala, como veremos más adelante.

# MULTIPLICACIÓN



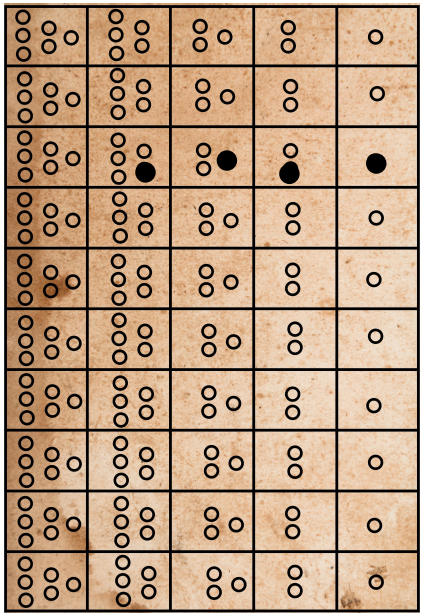
En el uso de la yupana matriz, se puede observar patrones con el movimiento que permiten predecir con exactitud, los resultados de números que se pueden representar con varias semillas, esto es maravilloso en cuento a su utilidad y dinámica.

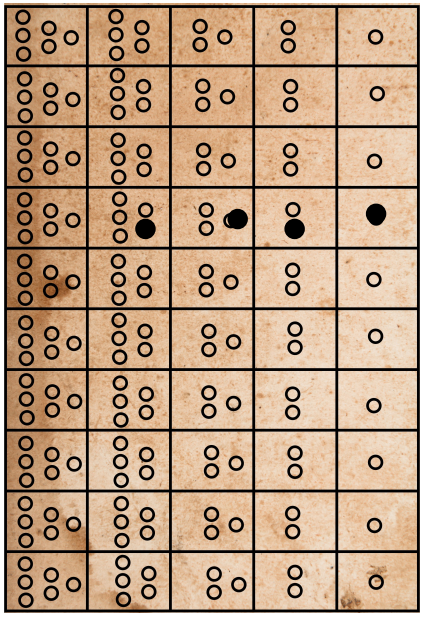
Por ejemplo siguiendo el patrón que se encuentra en la tabla del 5, obsérvese los resultados:

1x5,2x5,3x5,4x5,5x5,6x6,7x5,8x5,9x5,10x5,**11x5,12x5,13x5,14x5,15x5,16x5,17x5,18x5,19x5,20x5.**

Obsérvese el movimiento de las manos con la yupana. Una semilla en la mano derecha y otra en la izquierda. Con la derecha representamos el primer resultado de la multiplicación:5, luego levantamos la mano para representar el segundo resultado con otra semilla (mano izquierda), y la mano derecha la alzamos porque no se usa para representar. Para la tercera operación el resultado 15, se baja las dos manos con una semilla respectivamente. El mismo patrón de una mano, la otra y luego las dos, bajando siempre un casillero, nos permite representar 19x5, sin ningún problemas, más sorprendente aún, sin operar, solo siguiendo la secuencia de movimientos. Los mismo con los otros órdenes y números y dimensiones.

# DIVISIÓN





En la figura 1. y figura 2. observamos como el chunka iskainiyoq (doce), se forma con cuatro grupos de tres; y tres grupos de cuatro, respectivamente. Esto es muy importante para explorar la noción de división que es la relación inversa de la multiplicación.

La memoria matemática, les llevaba a comprender el 8, por ejemplo, como cuatro grupos de dos, dos grupos de cuatro, un grupo de ocho.

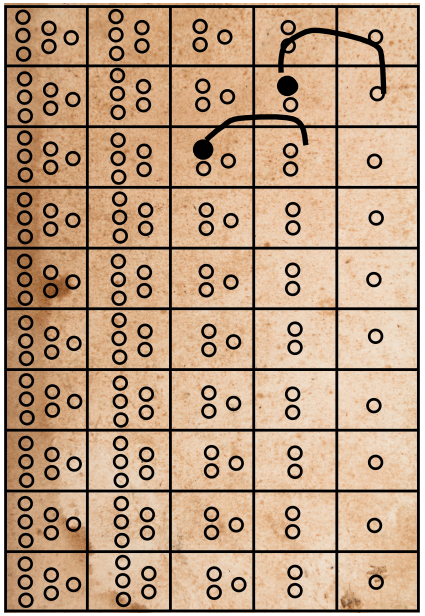
El diez como cinco grupos de dos, dos grupos de cinco, un grupos de diez. Todo ello forma parte de los recursos que se utilizarán para repartir cantidades más grandes.

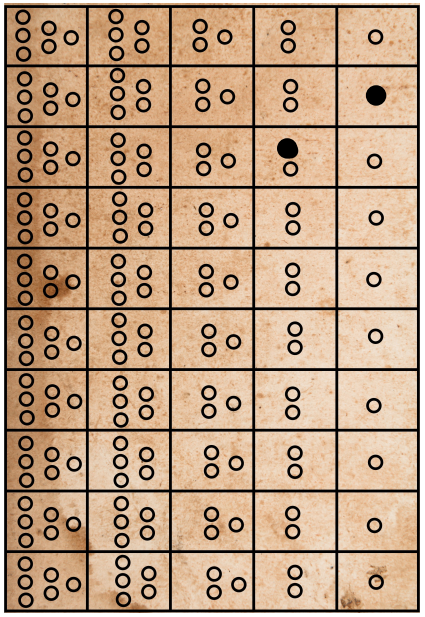
En muchas explicaciones de las yupanas se recurren a técnicas y herramientas actuales que utilizamos para multiplicar o dividir, sin embargo, esta interpretación de las matemáticas ancestrales, utilizan solo los recursos y conceptos de esos tiempos, es decir, su tecnología para explicar cómo construían sus números, sistemas y sus operaciones.

Se entiende esto como un proceso de muchos años y colaboración o influencia de una cultura a otra.

Se podrían explicar otras relaciones como potencias, números racionales, sin embargo, el investigador, no tiene referencias que se hayan utilizado por lo que no es motivo de esta investigación.

# DIVISIÓN





En lo práctico, se pudo haber repartido tierras, alimentos o armas. La división es un tipo de reparto donde su cualidad es que es equitativo, es decir, a cada grupo le corresponde la misma cantidad.

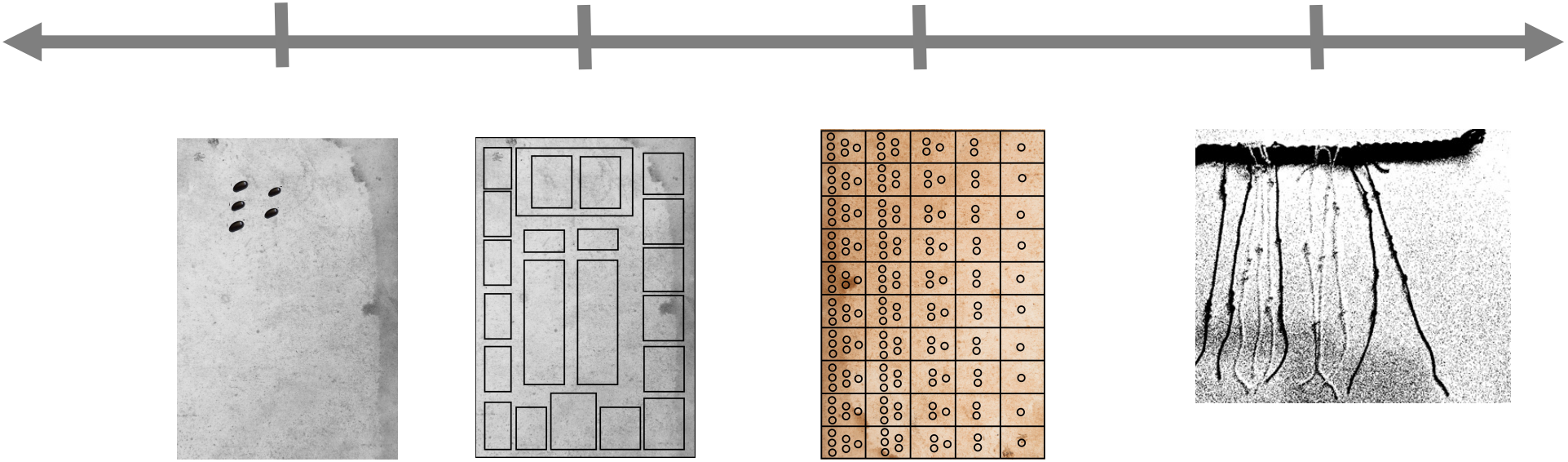
Como la división relaciona los mismos conceptos que hemos explorado en la multiplicación como grupos iguales, elementos por grupos y el total, decimos que es el proceso inverso a la multiplicación.

Cuando se exploraba que el 12 puede representarse como tres grupos de cuatro; cuatro grupos de tres, dos grupos de seis, seis grupos de dos, estamos observando el proceso inverso a multiplicar.

La memoria matemática, que ya hemos conceptualizado, permite evocar estas relaciones a través del movimiento, que serán usadas para operar cantidades mayores.

En la figura 1. y figura 2. se representa 320 repartido en 10 grupos, llevará a tener 32 elementos por grupo. Los contadores, irán encontrando estas relaciones y patrones a través del movimiento cuando repartan (dividan). 320 ÷10, se traducirá en que a cada número (300 y 20), se le representará en un orden anterior.

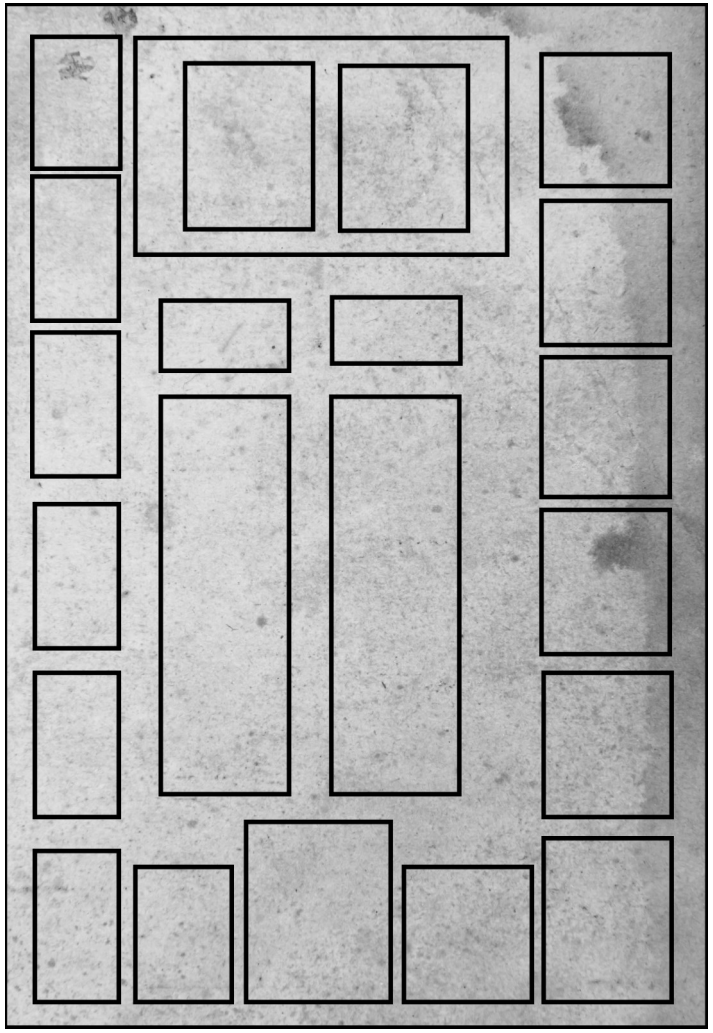
# CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS



La siguiente, es una línea progresiva interpretativa sobre como se construyeron los conceptos relacionados a los números. En la fig, 1 empezaron por representar ideas, animales, frutas con semillas en una superficie libre. En la fig. 2 luego utilizaron la taptana para construir nociones más elaboradas como la cardinalidad, noción de decena y esquemas para diferenciar órdenes. Luego fig. 3 se consolido todo su sistema a través de la taptana con el descubrimiento del cero y su esquema dimensional y multirepresentativo. En la figura 4 el quipu es el material para el registro que por su tecnología permite que la información permanezca hasta nuestros tiempos.

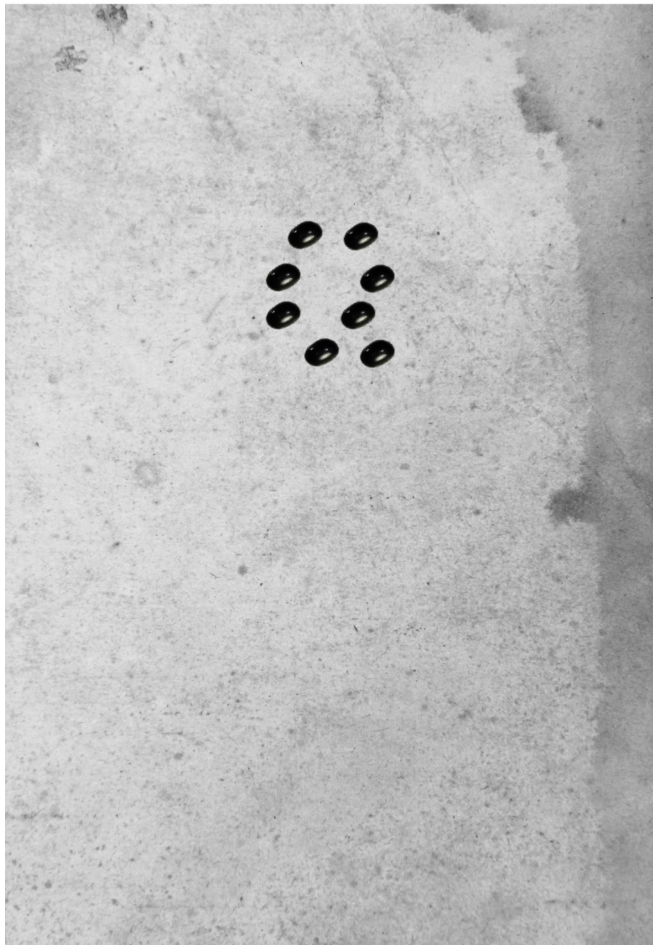
Primero el “cero” se concebía como nada o vacío en la fig. 1. Luego como ausencia de cantidad o de cardinal en la fig.2. Luego se le dio un símbolo y adquirió muchas propiedades y valor en sí mismo en el uso de la yupana y el quipu.

# CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS



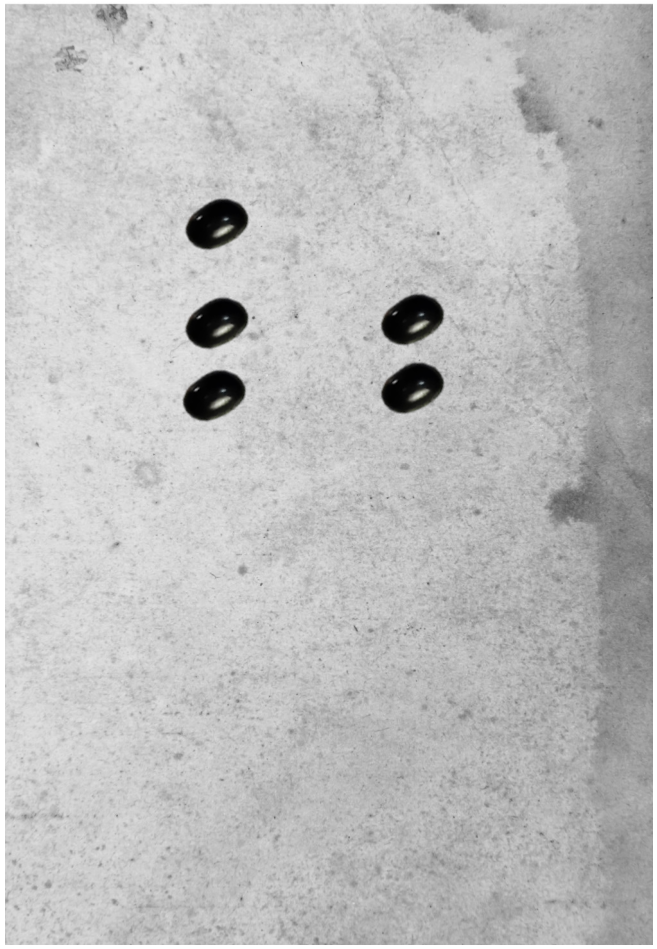
Este tablero llamado taptana, es probable se haya utilizado para ceremonias y juegos, pero tiene el potencial por su estructura para ser el material que se utilizó para enseñar los conjunto, cardinalidad, correspondencia, la noción de decena y de base 10 entre otros conceptos fundamentales para explorar luego con la yupana.

# CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS



Existen nociones que son fundamentales para empezar a comprender la naturaleza del número, su construcción y funciones y para que se haya desarrollado la tecnología de la yupana. Son llamadas nociones prenuméricas: noción de grupo, conservación, correspondencia, secuencia, posteriormente cada cultura realiza un viaje desde una matemática intuitiva hacia una matemática hipotética deductiva. Imaginamos un momento y un escenario muy particular donde los ancestros andinos empezaron a formar grupos con las semillas para representar otros objetos, luego empezaron a compararlos.

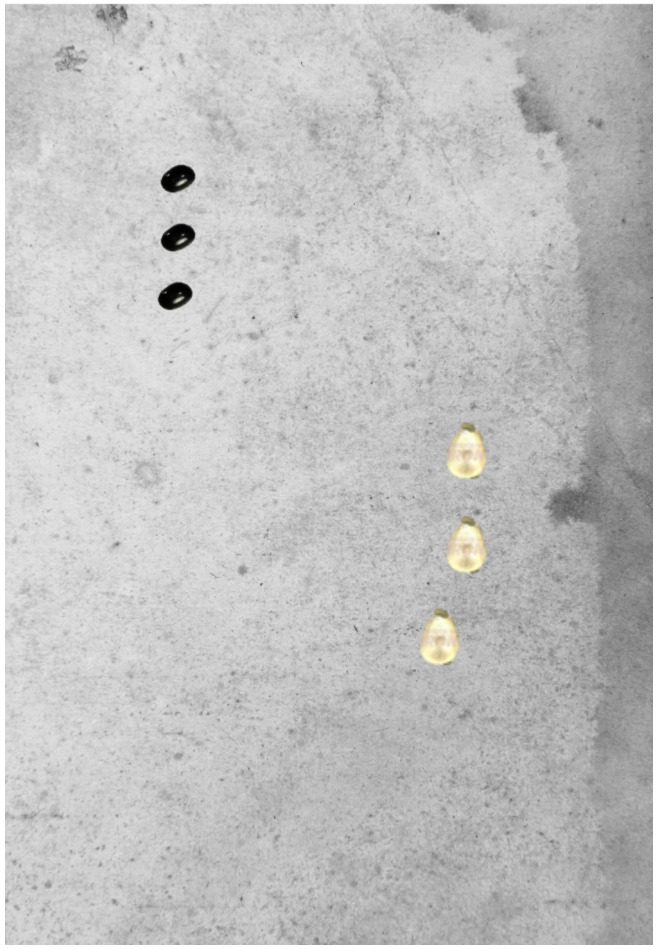
# CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS



Formaron un conjunto de tres semillas de frejoles y otro conjunto de dos, empezaron a compararlos, quien era mayor, quién era menor ¿Cómo hacer para igualarlos?

Se dieron cuenta que ese que llamaban kimsa (tres) de semillas de maíz, podían tener también kimsa de semillas de frijoll. ¿Qué era kimsa? No era el frejol, tampoco el maíz ¿Dónde estaba?. Abstrayendo y generalizando: así fueron nombrando a aquellas ideas conjunto que son los números.Estamos muy lejos aún de que una sola semilla represente a kimsa, muy lejos aún de descubrir el cero  que se consolidaría con el uso de la yupana.

# CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS



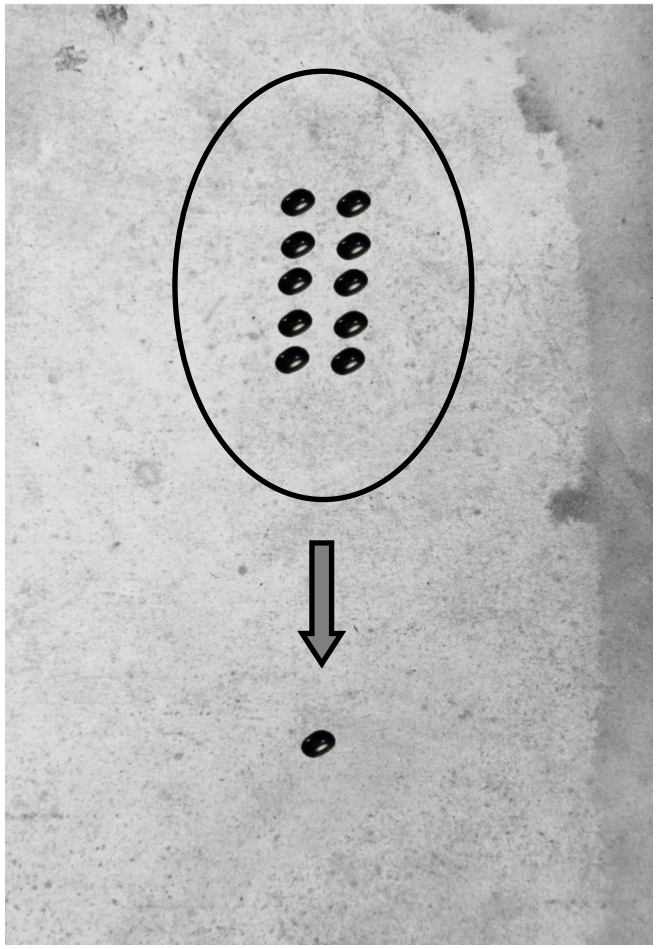
La cardinalidad, permite comprender la idea de la totalidad del conjunto. Observar grupos diferentes y que todos tengan la propiedad de ser kimsa (tres), es un gran paso para encontrar todas las relaciones entre los conjunto, por ejemplo ¿Qué relación hay entre el conjunto del 3 y del 4?

Ahora hace falta un esquema que permita sistematizar todos los conjuntos, que permita visualizarlos para compararlos, para predecirlos, uno que permita que se visualicen como material concreto.

El material que tiene este potencial es la taptana que es una estructura con cavidades donde se pueden representar diferentes conjuntos.

Se puede representar una secuencia desde el 1 hacia adelante.

# CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS



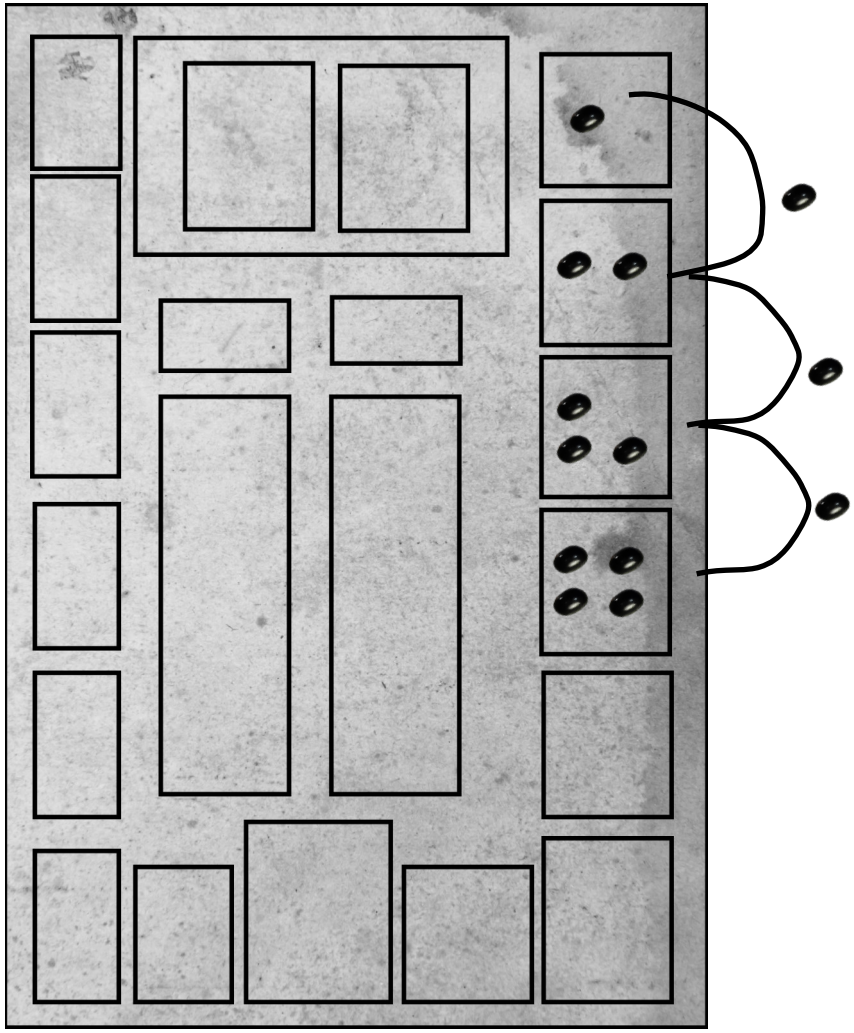
Se sabe que agrupaban en sacos las papas, los naturales, y por cada bolsa , en representación, colocaban 1 papa afuera para representar el total de sacos. Por otro lado en la yupana se utilizan semillas, por lo que se deduce que tuvieron al principio una función de material concreto, luego una función de material manipulativo.

Por ejemplo par representar al 10 , usaron al principio 10 semillas, luego solo 1 semilla representó al grupo de 10.

Este proceso, esta transición, lo veremos inmediatamente con el uso de la taptana.

Muchas civilizaciones han utilizado el sistema de base 10 , quizá porque coincide con que tenemos 10 dedos y los hemos utilizado desde hace mucho para contar y antes que las semillas eran nuestro material concreto por excelencia.

# CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

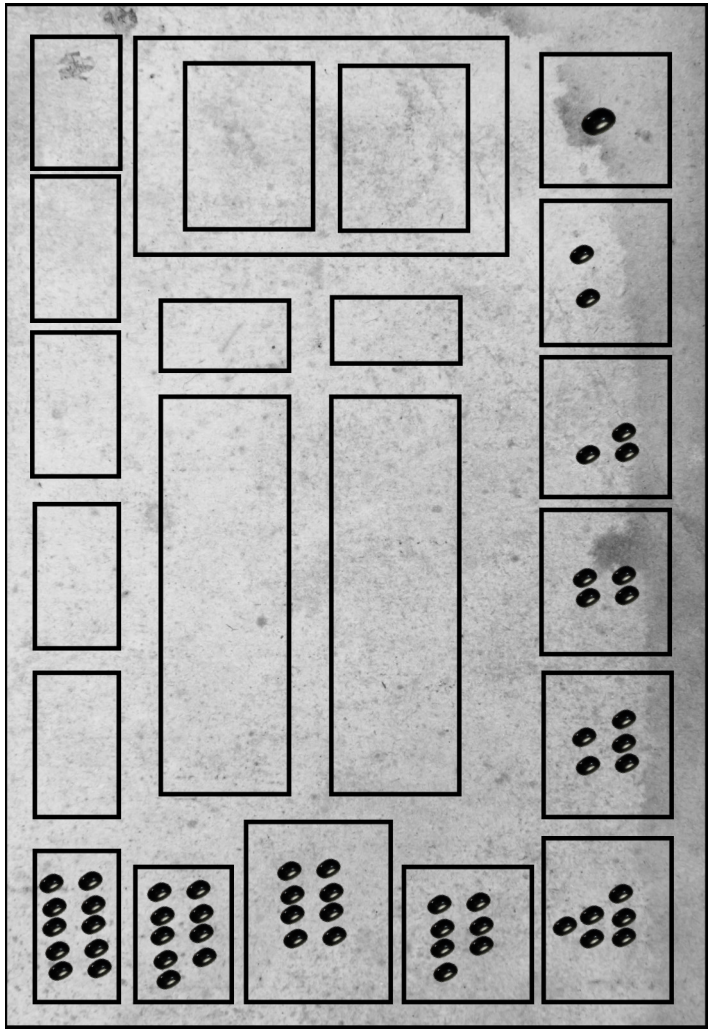


Se pudo haber trabajado la cardinalidad utilizando los cuadros de la taptana. Obsérvese como se construyen los números hasta llegar a 10.

Aquí al representar un grupo de uno en una cavidad, luego un grupo de dos que le sigue, luego de tres y así en adelante, permite descubrir el primer patrón matemático que relaciona a todos los números: ¿Cómo se unen huk, iskay, kimsa, tawa, pishja, soqta, qanchis, pusaq, isqun? Se unen agregándole una unidad desde huk (uno) hacia adelante: todos los números se construyen agregando una unidad.

La taptana tiene el potencial para cumplir ese rol, en la formación de contadores.

# CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS



Se pudo haber trabajado la cardinalidad utilizando los cuadros de la taptana. Obsérvese como se construyen los números hasta llegar a 10.

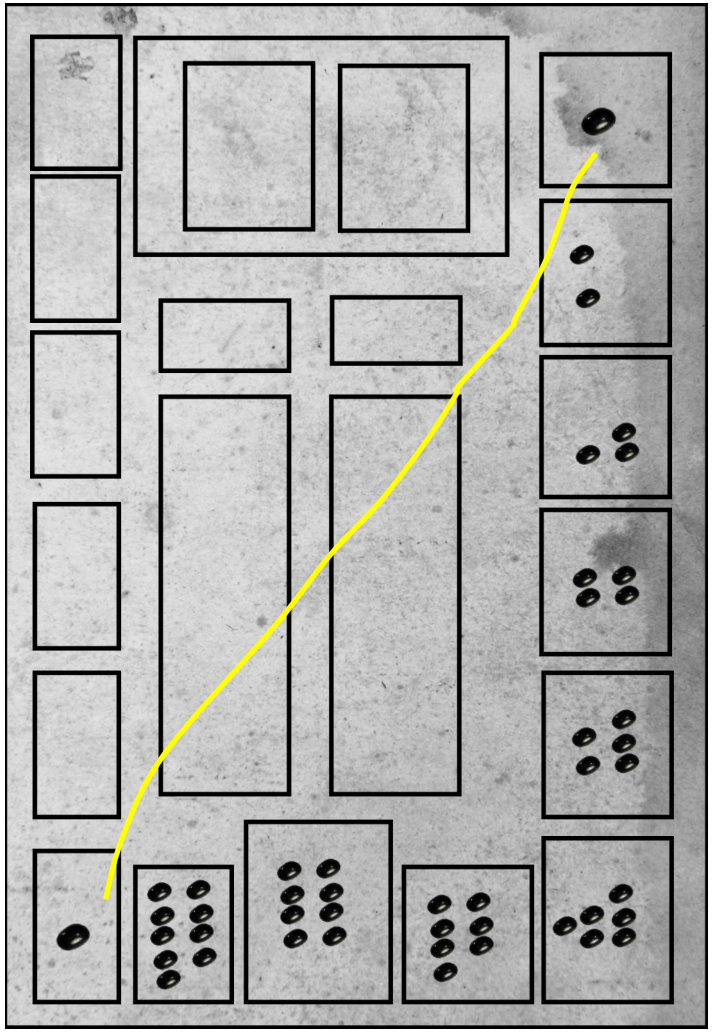
De esa forma se explora la cardinalidad y es un asunto propiamente matemático descubrir la unidad.

Otro descubrimiento importante que deben hacer es agrupar de a diez y darle un símbolo a ese grupo. Pero no cualquier símbolo, debe ser uno que permita construir un sistema.

Agrupar de a diez, viene a ser en parte una convención social o algo que responde a la circunstancia o contexto de una civilización, ya que existen infinitos sistemas, sin embargo algunos resultan más prácticos como el de base 10, base 3 ,2, 40 o 60 , por citar algunos.

El caso es que cuando se llega a la convención en una cultura de que se va a agrupar de a diez, se empieza a plantear cuál será la estructura que tendrá ese sistema de base 10. Hipotetizaremos algunos conflictos que pudieron surgir que nos permita a la vez comprender luego la estructura de la yupana matriz.

# EL ENCUENTRO DE LOS UNOS



La estructura de la taptana tiene el potencial para explorar la cardinalidad de los conjuntos. Se representa las cantidades del uno al nueve, una vez que llegamos a diez, representamos ese grupo de diez por una sola semilla.

Sucede una situación de nuevo aprendizaje o conflicto cognitivo llamado “El encuentro de los unos”.

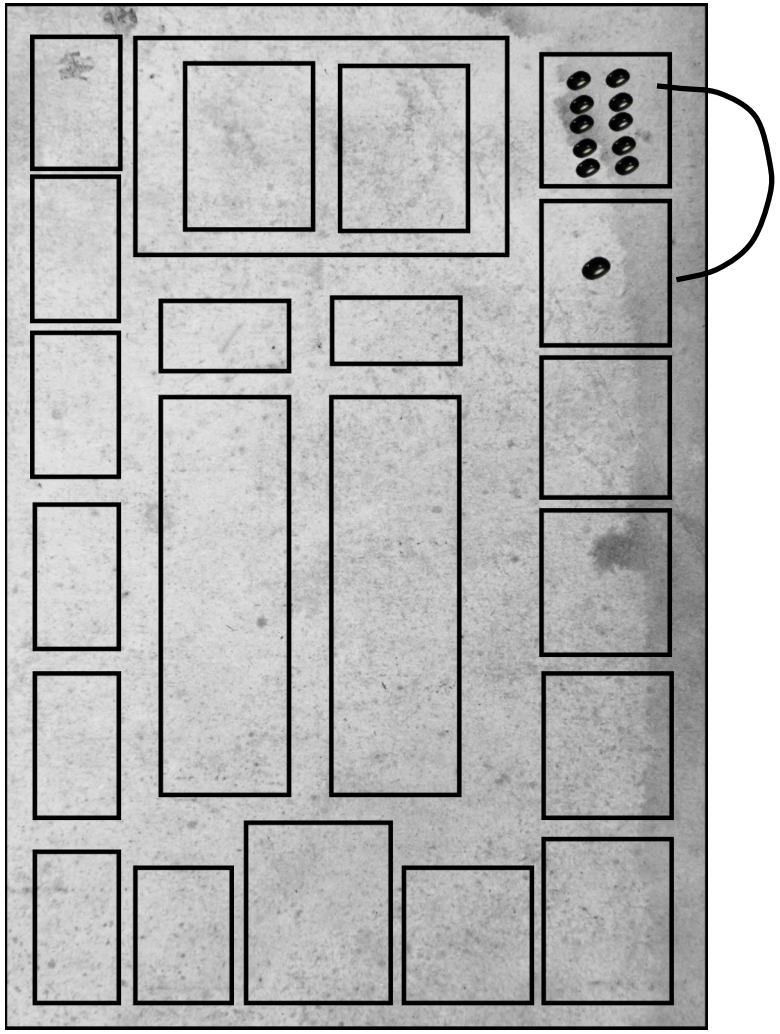
Si representamos el uno como un grupo de diez, cómo representamos el diez y uno , el diez y dos; y hacia adelante. En la yupana matriz, podemos encontrar este problema resuelto magistralmente, sin embargo, la taptana no tiene la estructura para poder resolver este problema con eficiencia.

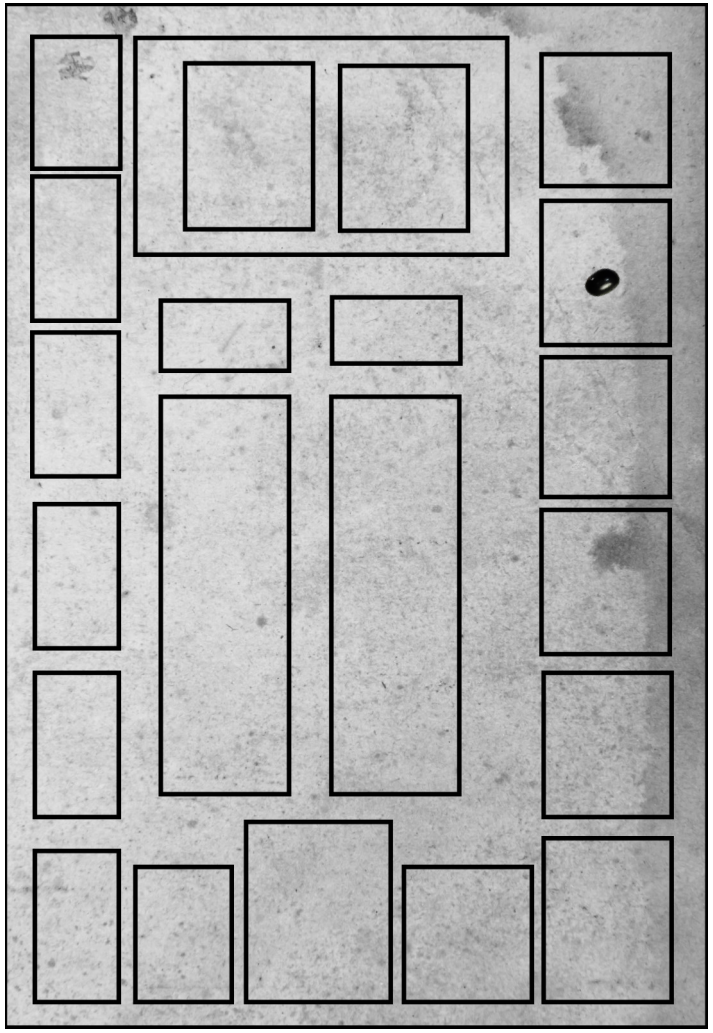
Sin embargo, nos puede ayudar aún mucho, ayudándonos a comprender cómo se formar otros grupos de a diez además de la decenas, es decir, la centena y hacia adelante. Que es lo que veremos en la siguiente página.

Conociendo el cardinal de un número, podemos representar todos los números menores de nueve en una sola cajita de la taptana.

# CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTO DE DECENA

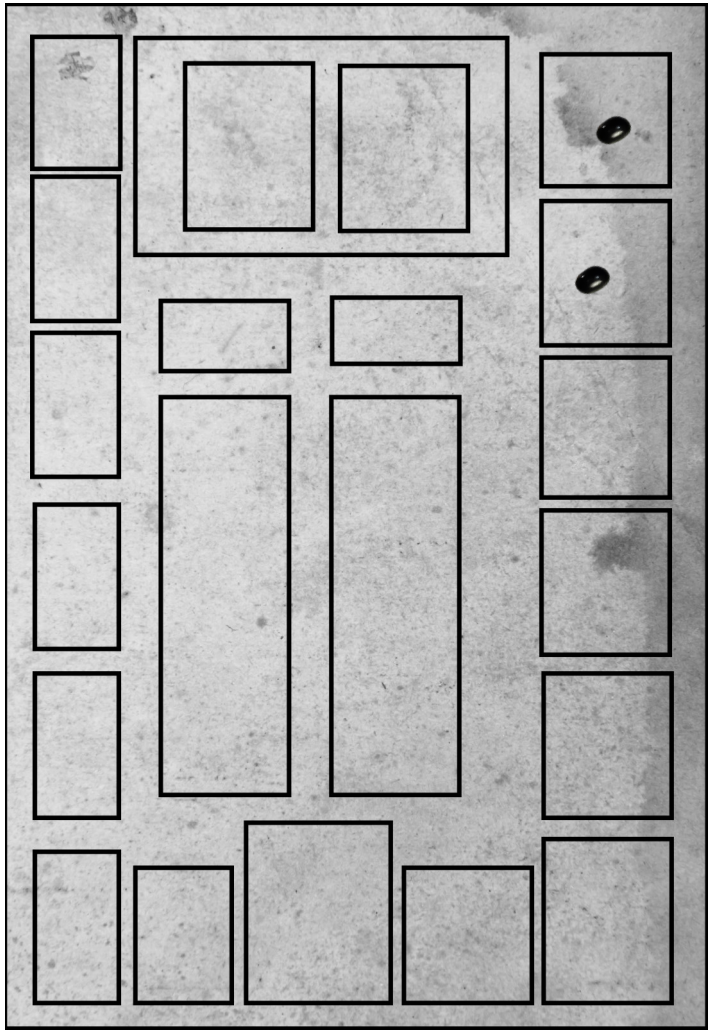
Tenemos muchas semillas que contar, entonces agregamos una a una, en la primera caja de la taptana, cuando llegamos a diez, remplazamos todo ese grupo de diez semillas por una sola. Esa nueva semilla que remplazará a las demás se colocará en la siguiente caja, ya que no significa una semilla (material concreto), si no representa a las diez (material manipulativo). El hecho de que cuando una semilla tenga un lugar específico y ese lugar información sobre su valor numérico es parte del camino hacia una matemática hipotético –deductiva.

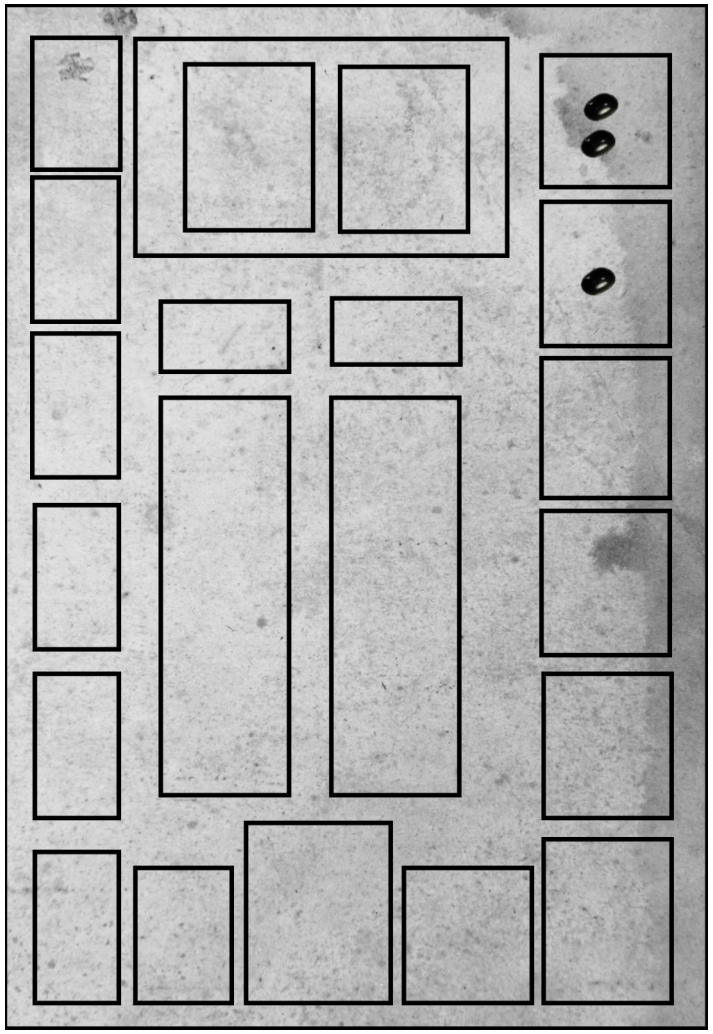




# CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTO DE DECENA

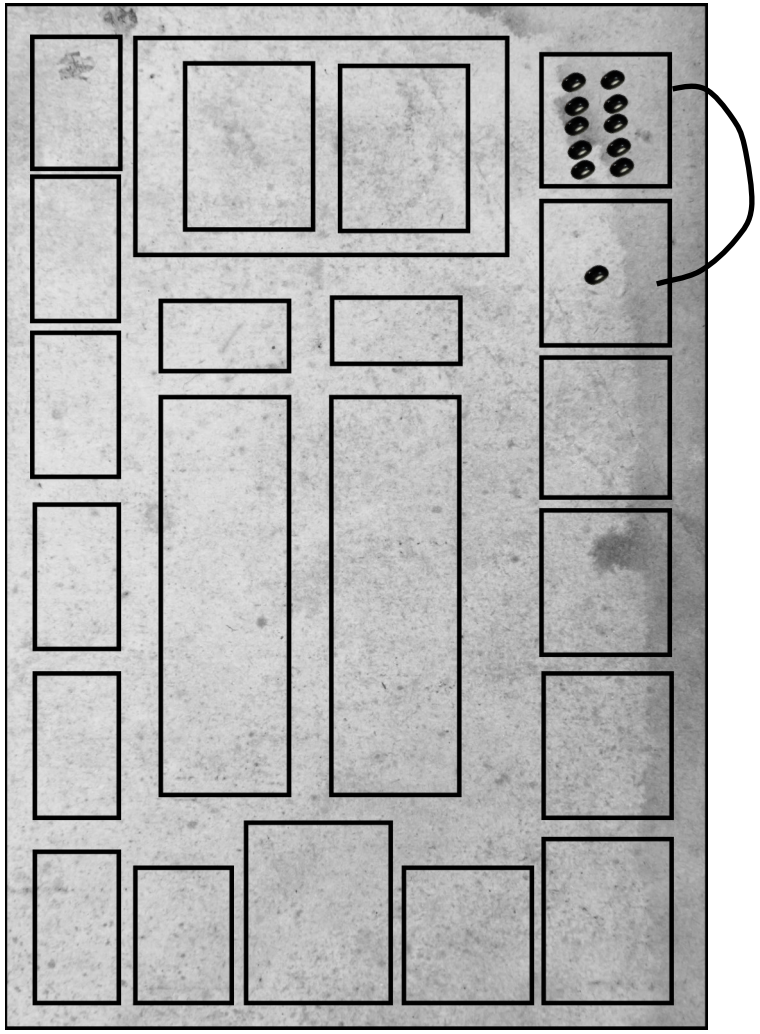
Al colocar una semilla (unidad) en la caja uno y una semilla en la caja dos que representa una decena. Se crea un conflicto cognitivo que le llamo el encuentro de los unos que aparece en la figura A. Las dos son semillas, sin embargo, tienen un significado diferentes. En la figura B, se agrega una semilla en la cajita de las unidades. Si contamos el total tenemos una decena y dos unidades.

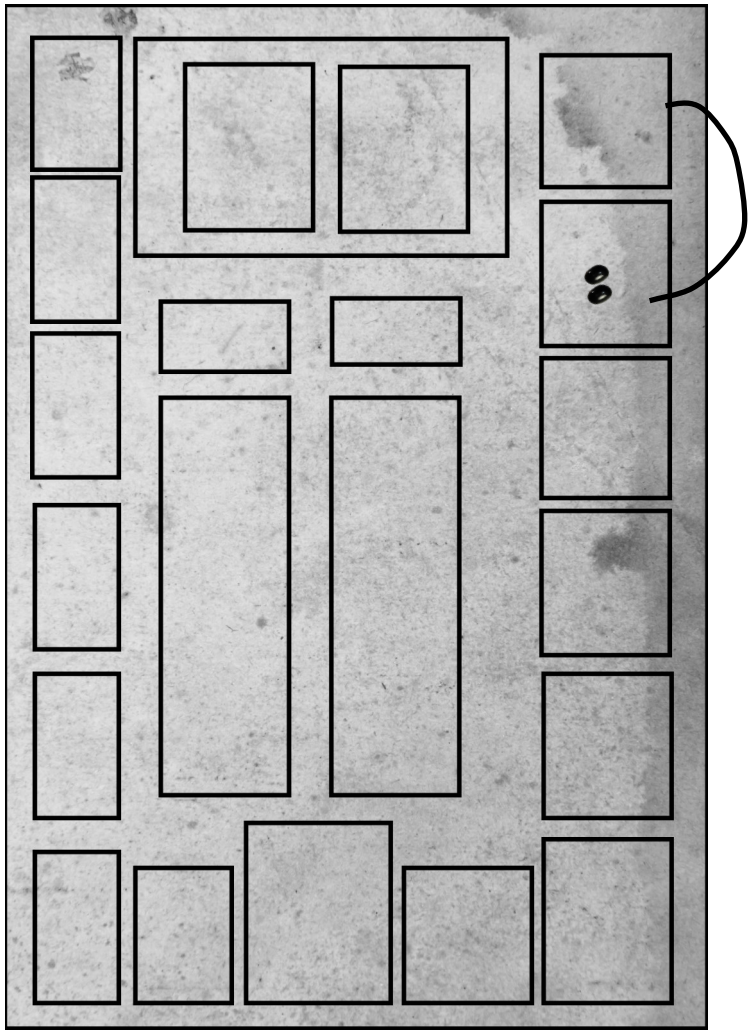




# CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTO DE DECENA

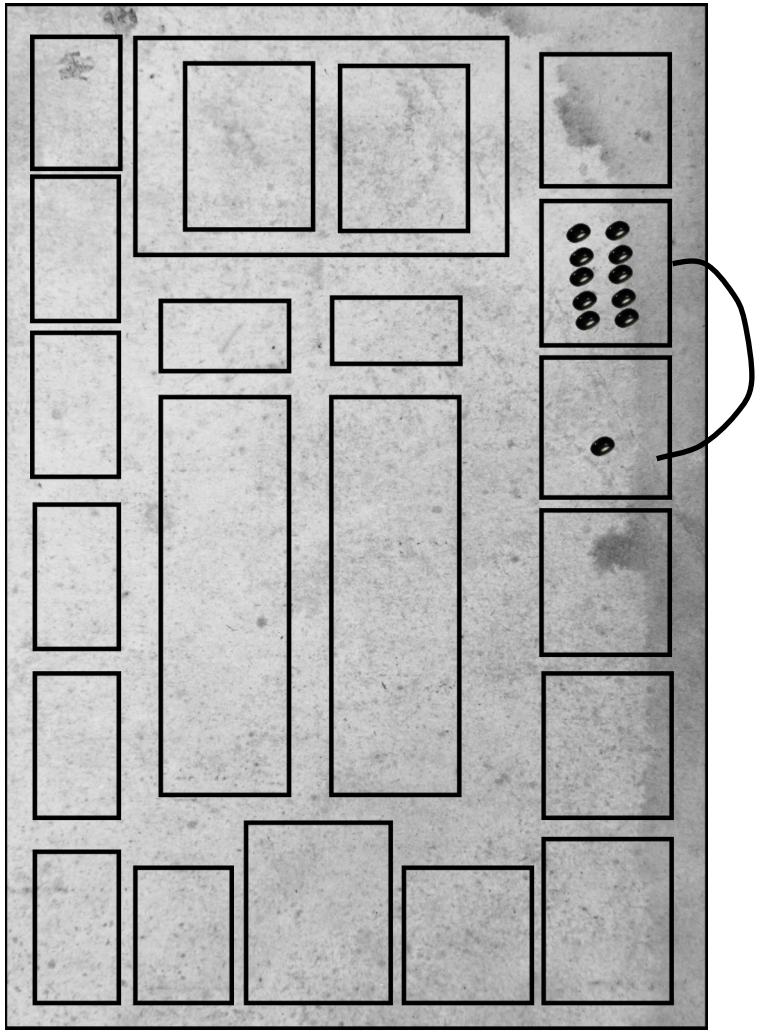
Tenemos en la cajita de las unidades, 10 unidades, podemos agruparlas y representarlas por una sola semilla. Ahora, en la figura B. tenemos 2 semillas y cada una representa a una decena, es decir, tenemos en total 20 unidades.

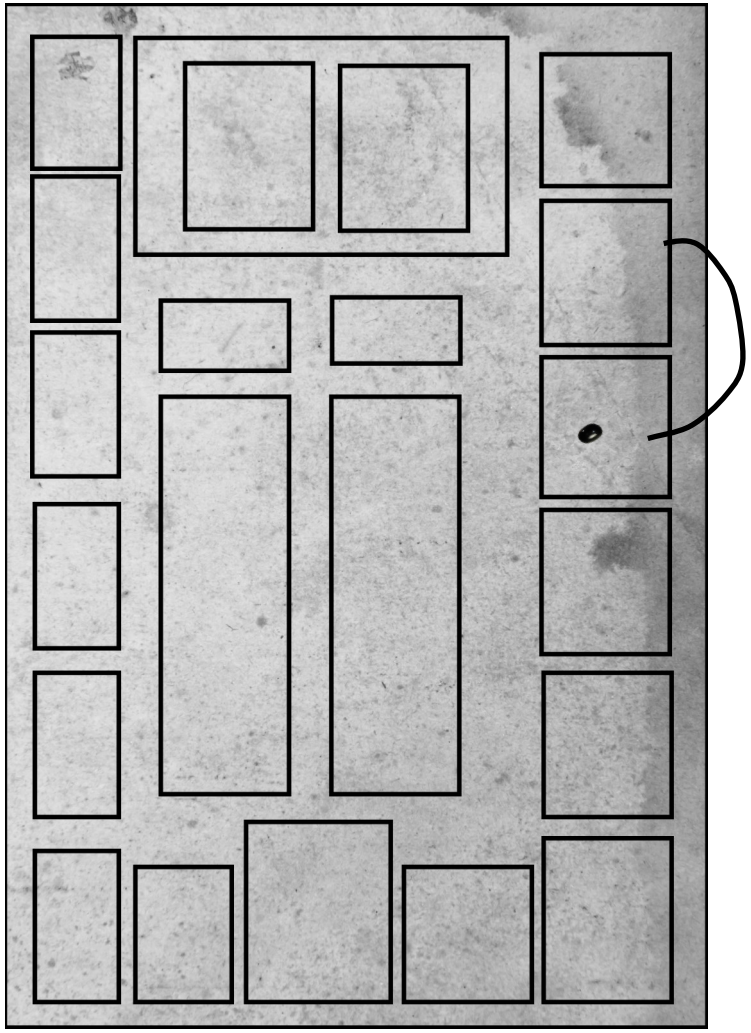




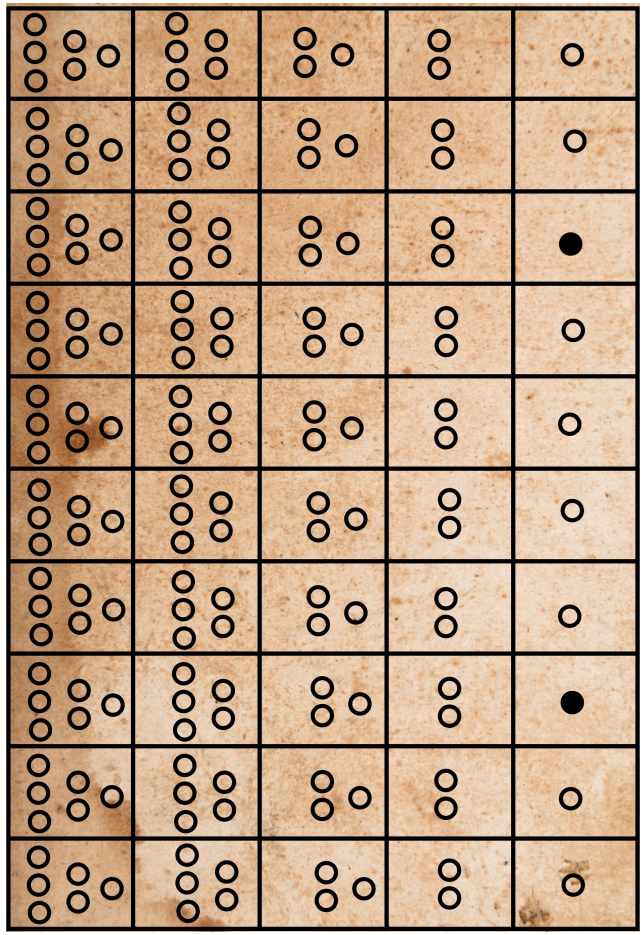
# CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTO DE DECENA

Tenemos en la cajita de las decenas, 10 decena podemos agruparlas y representarlas por una sola semilla. Esta semilla representa a los diez grupos de diez, 10 decenas o una centena. Pacha es el nombre en quechua para referirse a este nuevo grupo. Esta forma de ordenar en la taptana permite predecir que se pueden seguir agrupando hasta obtener números muy grandes. En la yupana se ha descubierto el cero, lo que permite representar el número de diversas maneras, en cambio, en la taptana no hay un símbolo aún en su representación y no tiene aún el significado del cero como lo utilizamos.





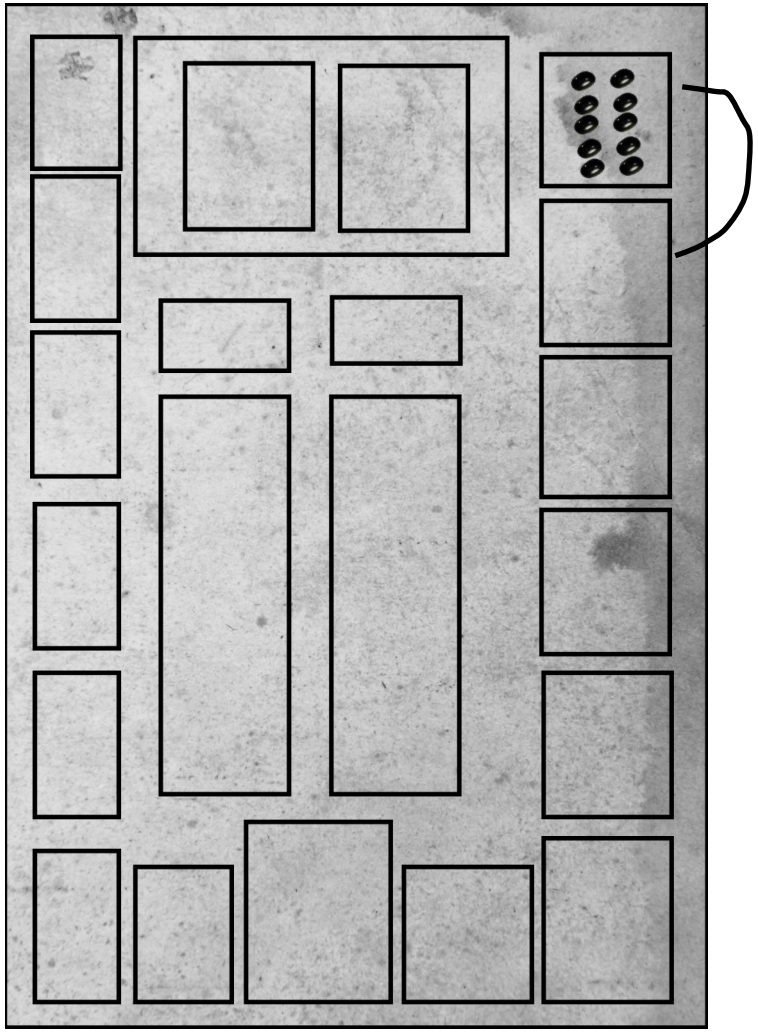
# DESCOMPOSICIÓN DEL 10



Se puede rastrear en idiomas como el aymara que los primeros números: 1: maya 2: paya 3: kimsa 4: pusi 5: phisqha 6: suxta 7: paqallqu 8: kimsaqallqu 9: llatunka 10: tunka están relacionados al 10 como una descomposición. Esto es muy útil si pensamos como agrupan y reagrupan cuando realizan las operaciones.

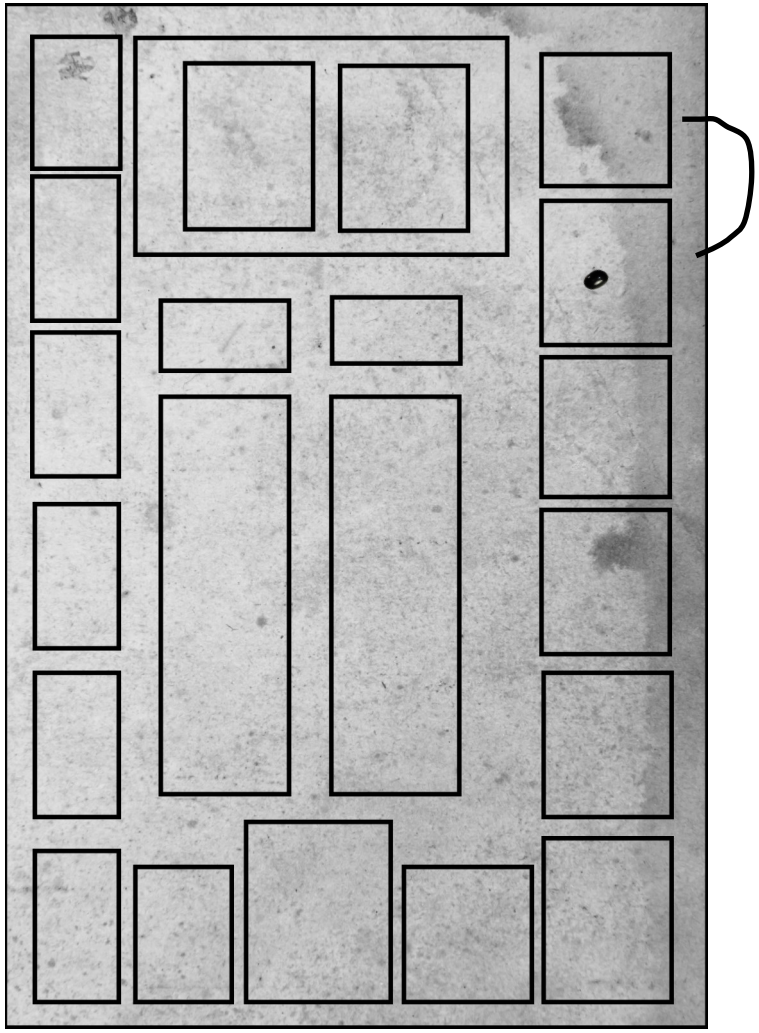
En la figura una forma de descomponer el 10 con motivos prácticos como 8 y 2, pero se puede hacerlo de distintas maneras, incluso en otras dimensiones. Lo mismo sucede con números más grandes.

# DE LA AGRUPACIÓN DE DIEZ A LA NOCIÓN DE ÓRDENES



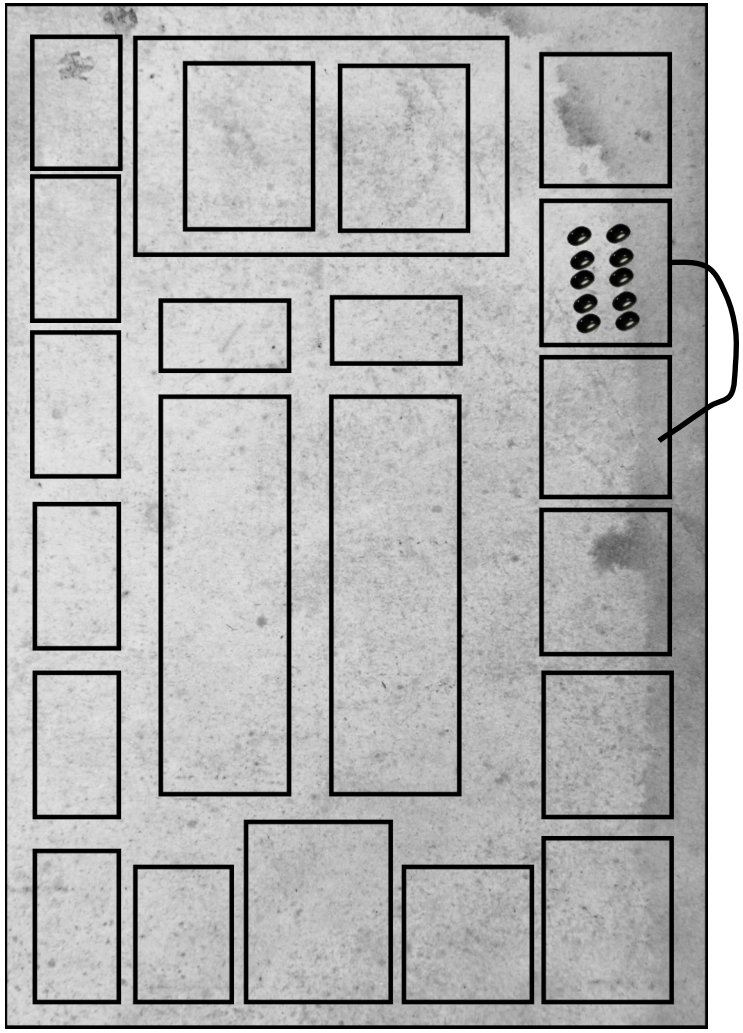
Cada semilla en cada recuadro representa un grupo de diez. La semilla remplaza a un grupo de diez, el cuadro representa un nuevo orden

# DE LA AGRUPACIÓN DE DIEZ A LA NOCIÓN DE ÓRDENES



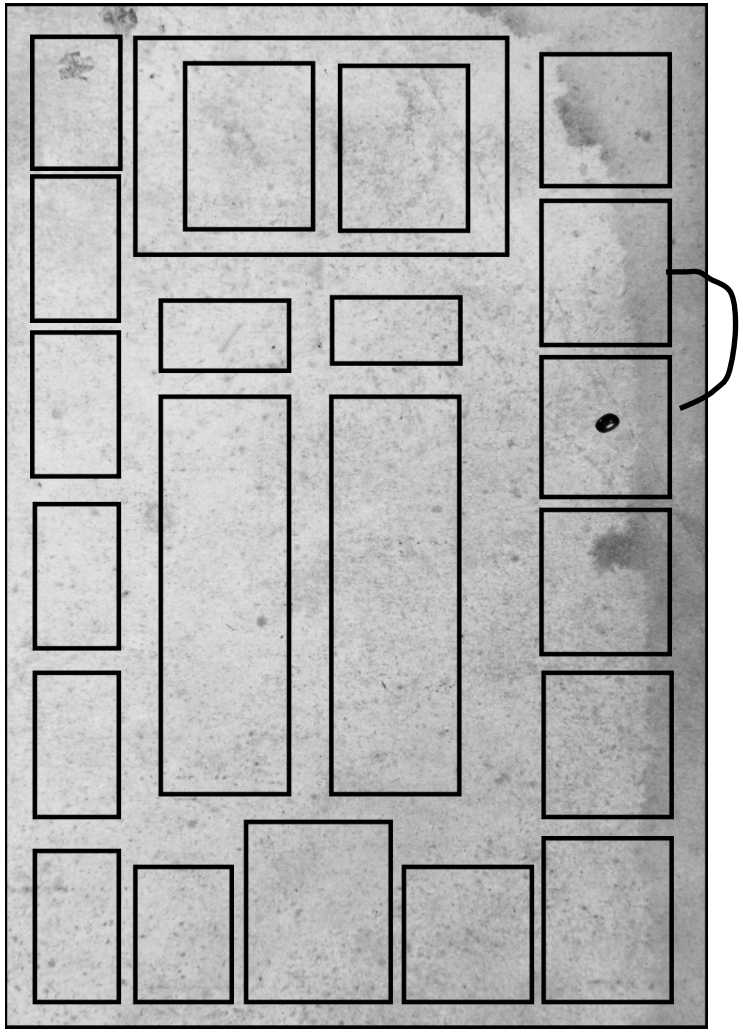
Cada semilla en cada recuadro representa un grupo de diez. La semilla remplaza a un grupo de diez, el cuadro representa un nuevo orden.

# DE LA AGRUPACIÓN DE DIEZ A LA NOCIÓN DE ÓRDENES



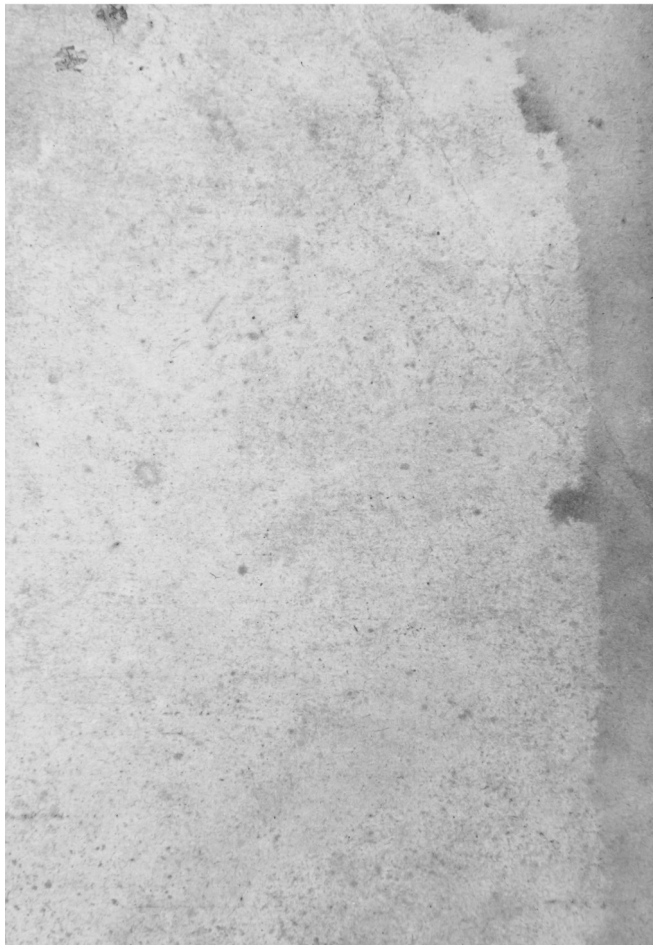
Diez decenas representan una centena y así hacia adelante. Son remplazadas por una semilla.

# DE LA AGRUPACIÓN DE DIEZ A LA NOCIÓN DE ÓRDENES



Diez decenas representan una centena y así hacia adelante. Son remplazadas por una semilla.

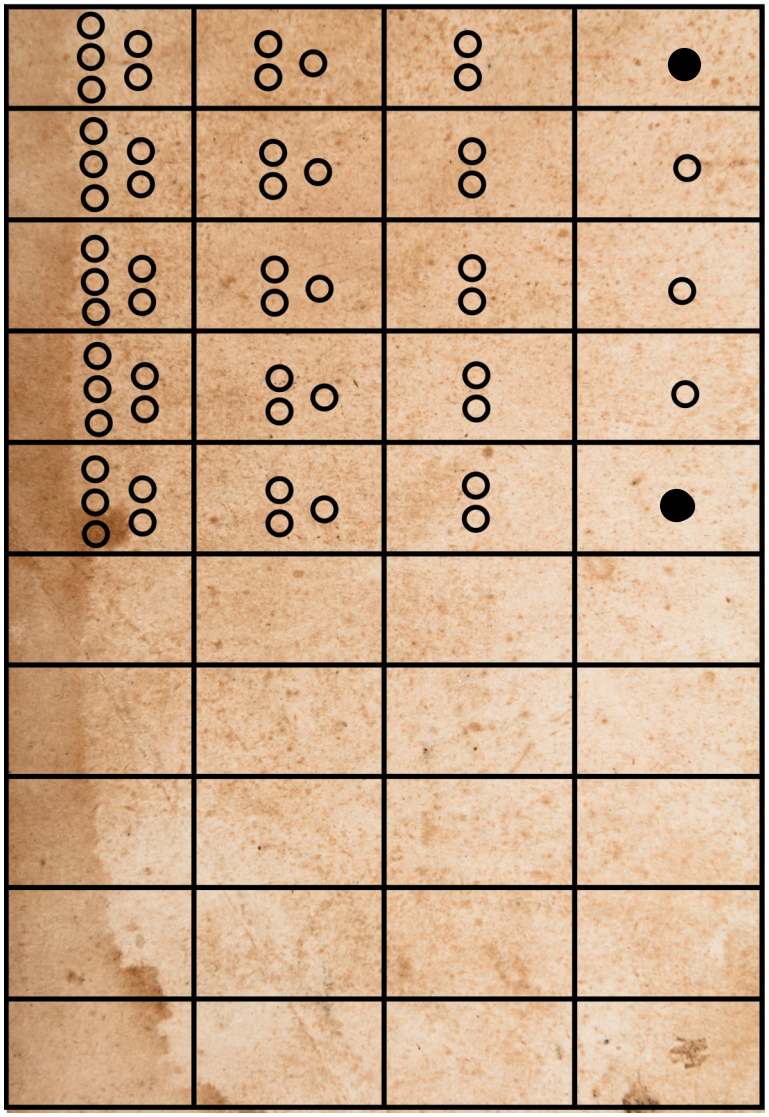
# EL DESCUBRIMIENTO DEL CERO



El cero no es solo la ausencia de algo, si no que modifica al número. Vemos que la taptana como la base para comprender el cero y la yupana como material para su uso magistral.

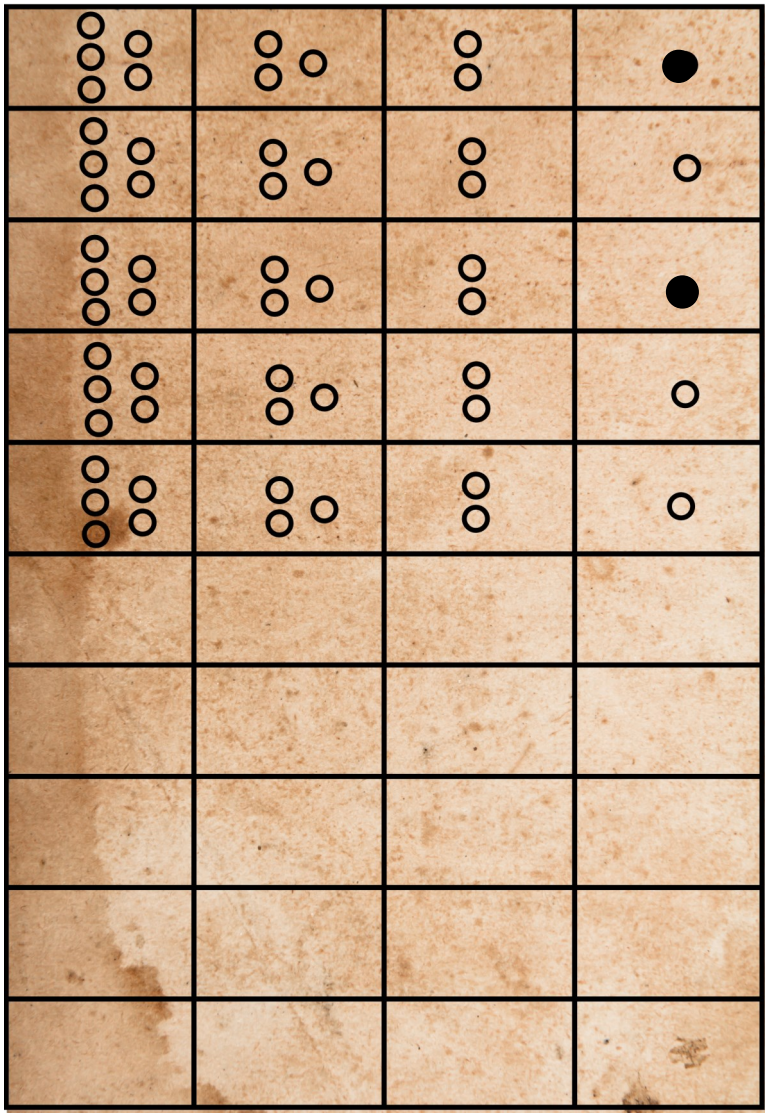
Desde el uso de las semillas para representar cantidades donde se empieza a desarrollar el concepto de vacío o nada cuando no había semillas; hasta el uso de la taptana para representar los cardinales y grupos de diez, donde el concepto de vacío o nada indicaba ademá que era nada algo: nada de una semilla que representa uno, nada de una semilla que represente diez, etc. Finalmente en el uso de la yupana, aparece el cero con su símbolo, en arcilla y piedra una cavidad, en madera un hueco o dibujo que lo represente, el cero adquiere un signo, una estructura que le permite modificar a los números, les permite la multirepresentación, la agrupación y reagrupación. Incluso cuando la yupana se encuentra sin semillas, se sabe que cada círculo es la ausencia de una cantidad en particular que pertenece a una dimensión que permite conocer su totalidad. A diferencia de occidente que contaba con la tecnología del papel y tinta para representar y operar los números, aquí se contó con la tecnología de una estructura dimensional donde los números no se escribían, se activaban con semillas y operaban a través del movimiento.

# ESTRUCTURA E INTERPRETACIÓN DE YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA



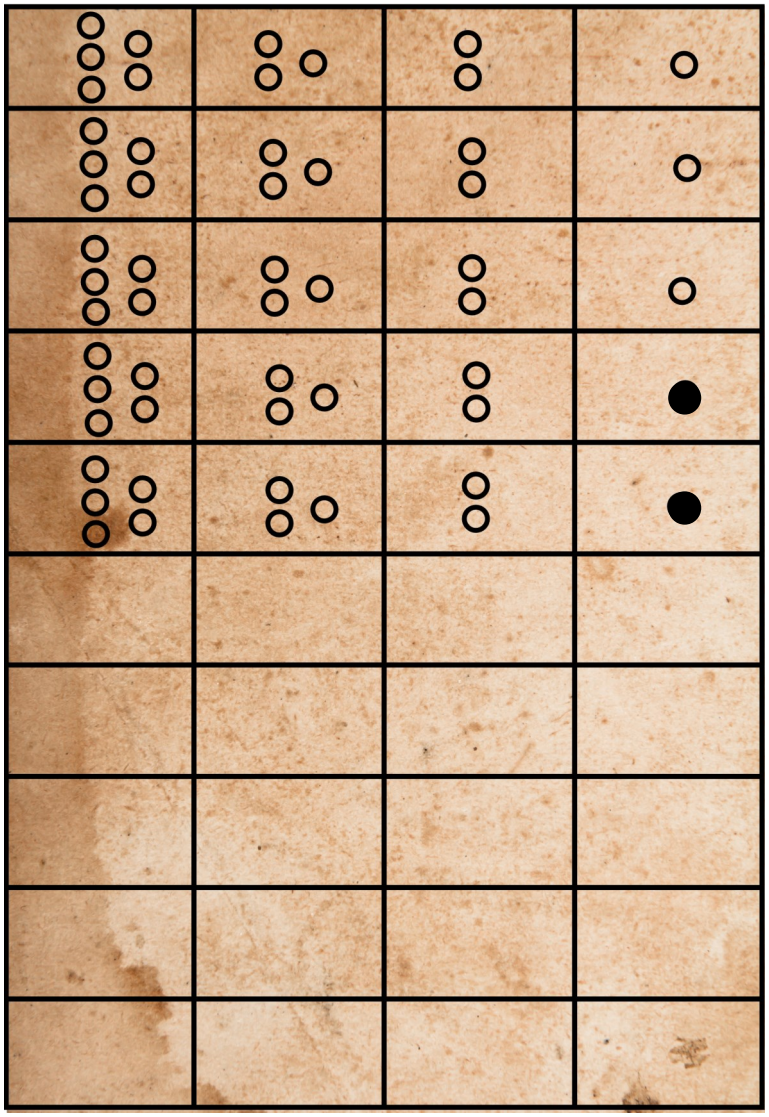
Esta yupana se interpreta con la misma lógica de la yupana matriz, considerando los mismos principios de dimensiones, ordenes y agrupamiento. También se le puede dar otros usos como que cada pieza represente a dos y ya no una sola unidad y responde a la necesidad de cuantificar un producto que se agrupe así (de a dos).

# YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA: SUMA



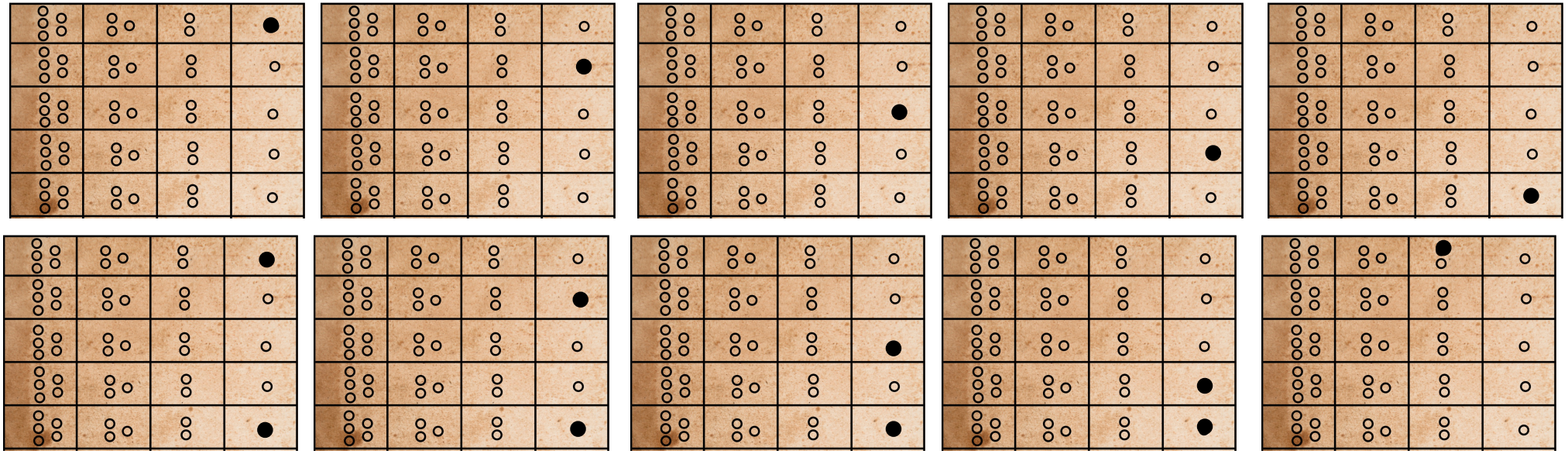
Se representa 1 + 3 = 4

# YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA: SUMA



Se representa 5 + 4 = 9

# YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA

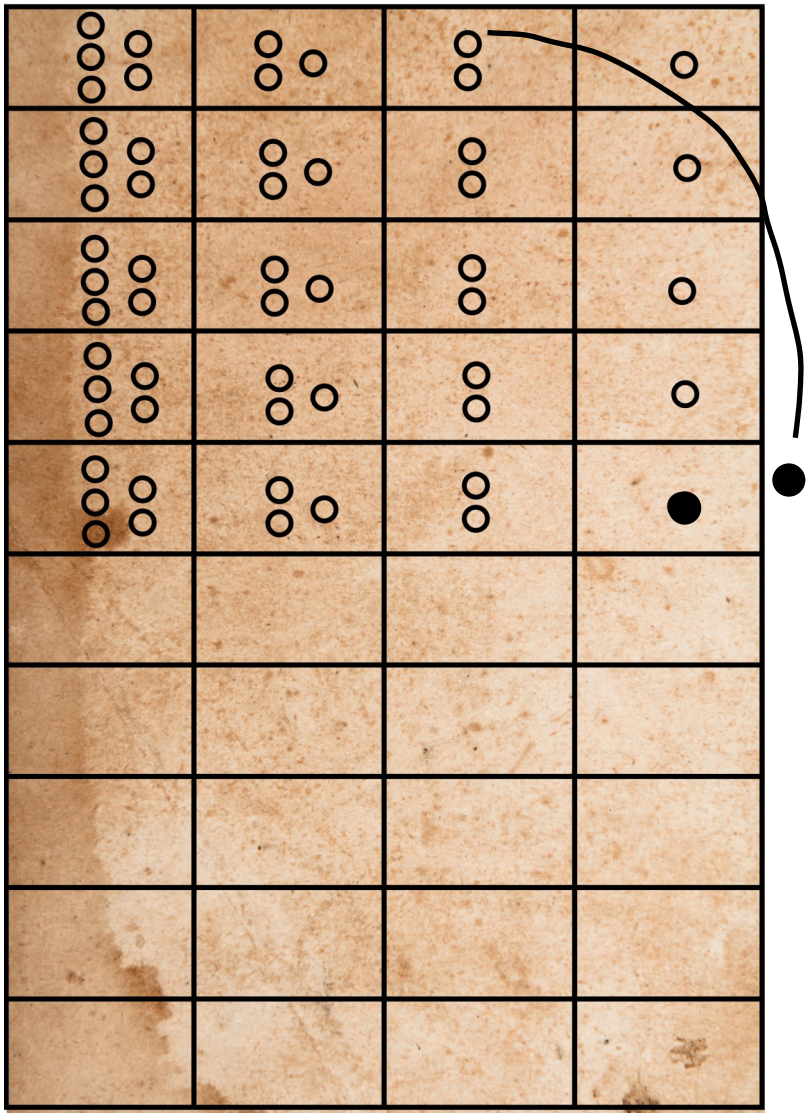


En la página 58 de este libro: “La forma como en la lengua aimara se compone, nos permite comprender cómo se descompone, por principio de reversibilidad. Obsérvese el 7 (2 +5),8 (3 +5), (10 –1), este último se entiende como un casi 10. Utilizaremos esta información, cuando a partir de la yupana matriz se interprete la yupana de Don Huamán Poma de Ayala”.

Los números como el 7 y 8 están vinculados al 5, esto tiene mucho sentido por la estructura de este esquema (modelo Don Huamán Poma de Ayala), por otro lado el 9 está vinculado al 10, esto es posible comprendiendo la estructura mental matemática de los contadores o de la historia de cómo se fue incorporando cada elemento en este tablero. En este tablero al igual que en la yupana matriz, se pueden realizar las operaciones con los conceptos de cardinalidad, dimensión, valor de cero y orden. Mi interpretación es que esta yupana ( de Huamán Poma de Ayala) es más abstracta de manipular, posiblemente utilizada por un contador mayor.

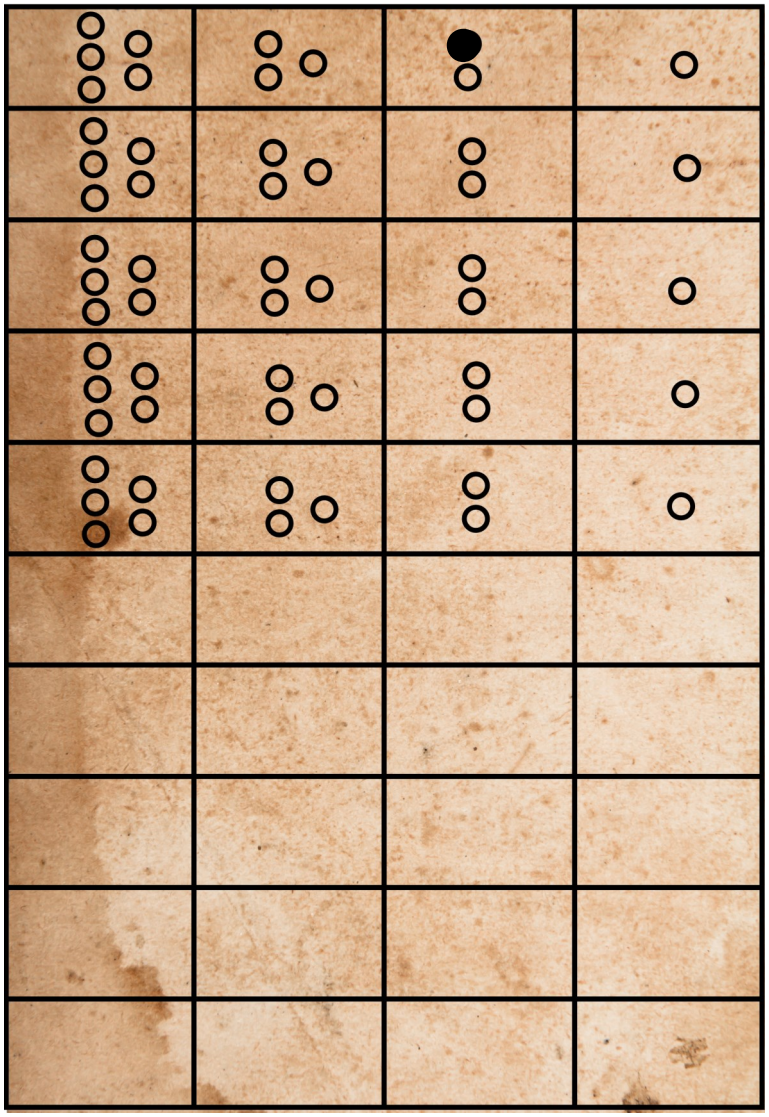
| Representación en la yupana matriz | Número arábico | Nombre | Números en Aymara |
|---|---|---|---|
| ● | 1 | Huk | Maya |
| ● | 2 | Iskay | Paya |
| ● | 3 | Kimsa | Kimsa |
| ● | 4 | Tawa | Pusi |
| ● | 5 | Pisqa | phisqha |
| ● | 6 | Soqta | suxta |
| ● | 7 | Qanchis | paqallqu |
| ● | 8 | Pusaq | kimsaqallqu |
| ● | 9 | Isqon | llatunka |
| ● | 10 | chinka | tunka |
| ○ | 0 | Ch’usaq | |

# YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA: SUMA



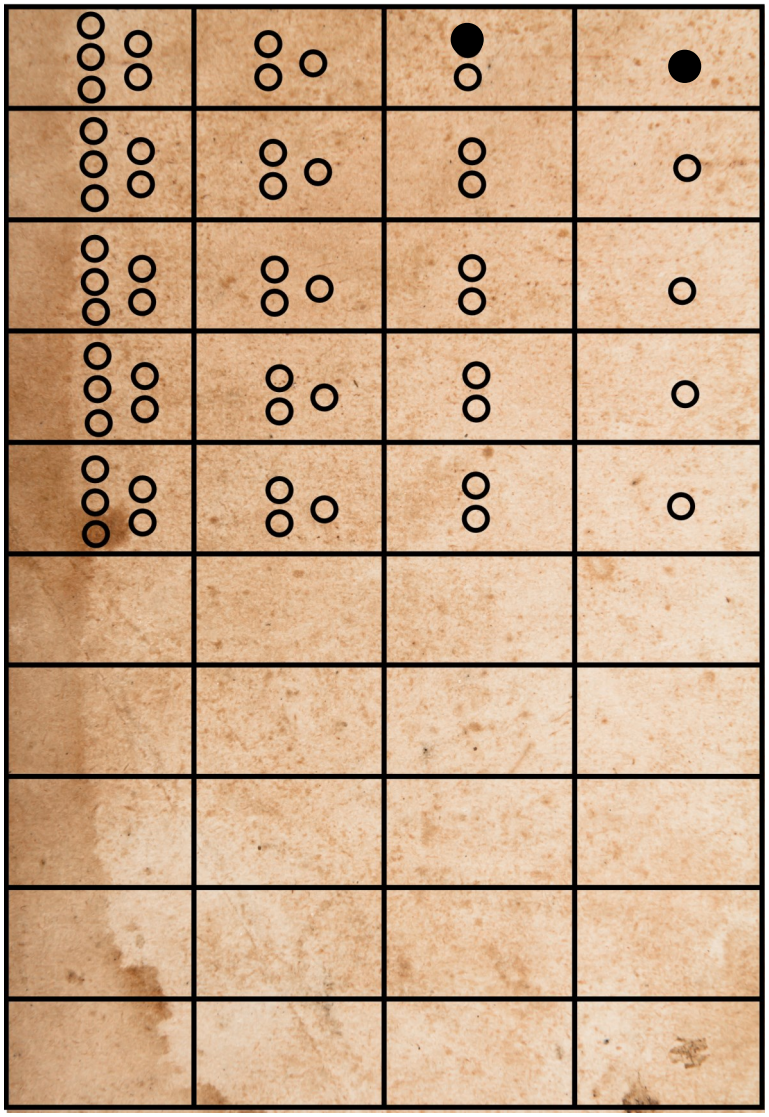
Se representa 5 + 5 = 10, en este caso en vez de superponer las semillas, en automático se agrupan y llevan la otra dimensión donde representan una decena. De esta forma se puede representar todo número y operarlo, sin ningún problema.

# YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA: SUMA



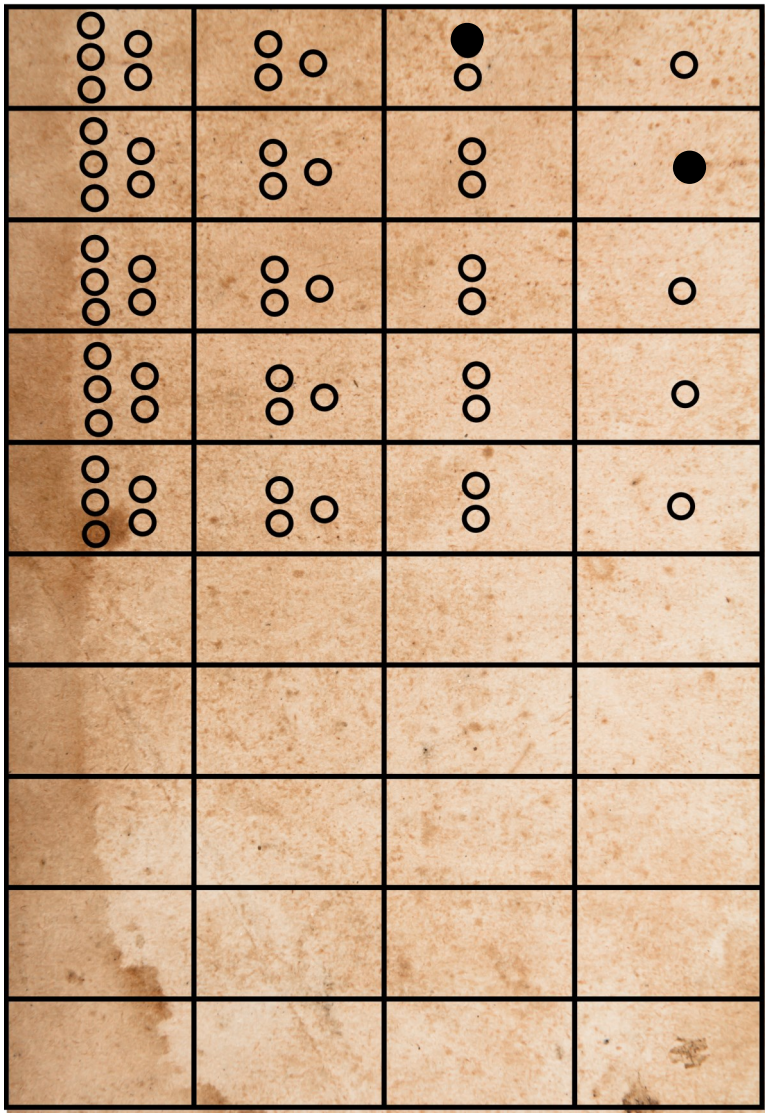
Se representa 5 + 5 = 10, en este caso en vez de superponer las semillas, en automático se agrupan y llevan la otra dimensión donde representan una decena. De esta forma se puede representar todo número y operarlo, sin ningún problema.

# YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA



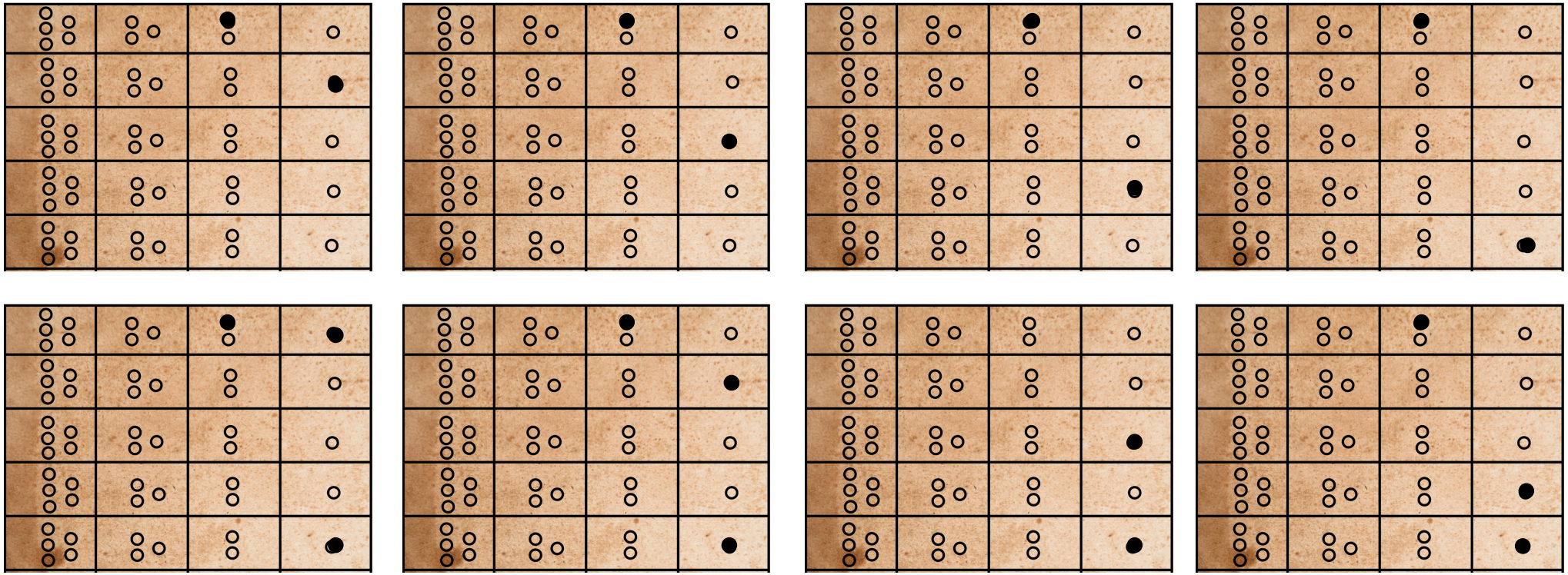
Representación del número 11

# YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA



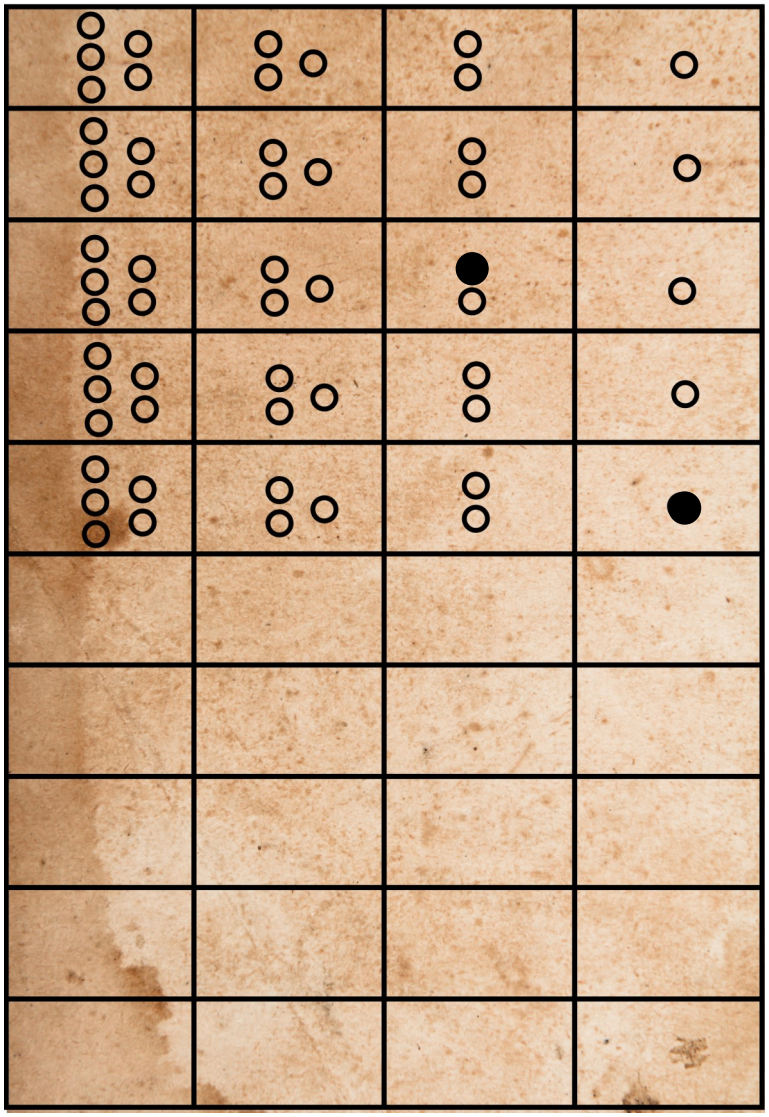
Representación del número 12

# YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA



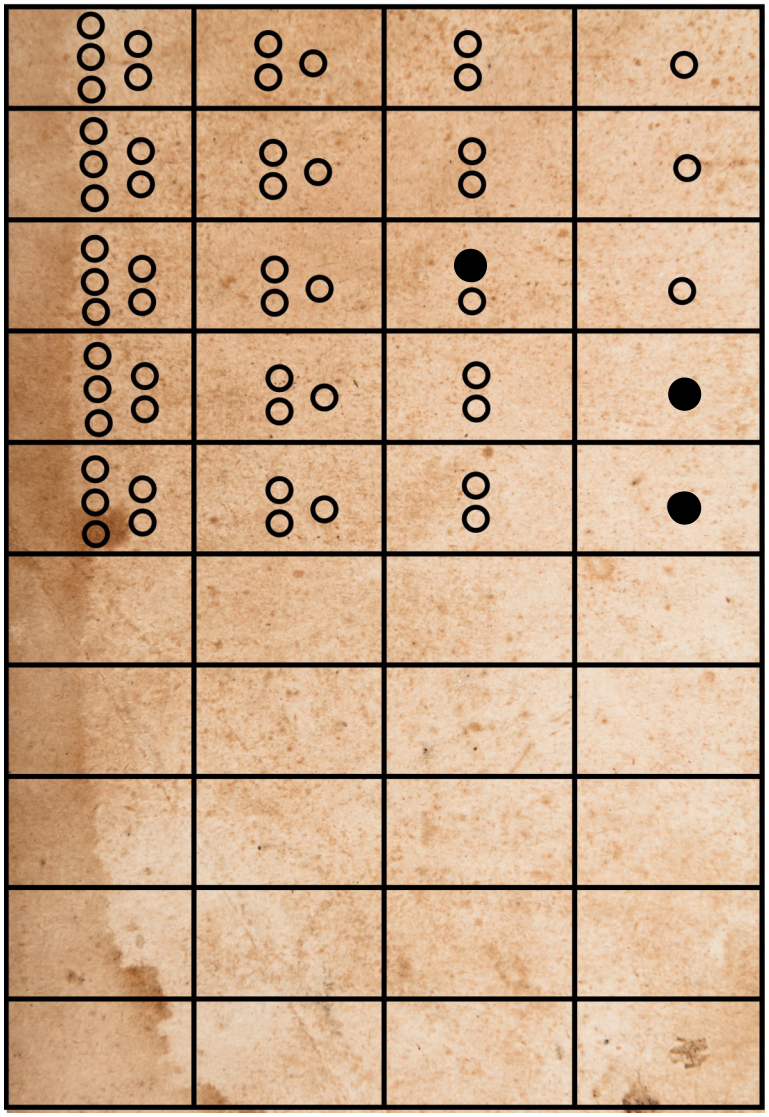
Obsérvese como se construyen los números del 12 al 19, esta yupana , a mi interpretación tiene una mayor cercanía a un pensamiento matemático aimara, mientras que la yupana matriz a la quechua. Con ambas se puedes representar y operar con los conceptos de dimensión, cero y cardinal. Hay mucha investigación por realizar en los campos de lingüística, sociología para explorar si hay relaciones entre esta forma de ordenar su pensamiento matemático y ordenar su parcialidad, lenguaje, si acaso adaptaban las yupanas a los patrones y regularidades como el ciclo lunar, para determinar eclipses, tiempo de cosecha de un alimento determinado, crianza y preñez de animales.

# YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA



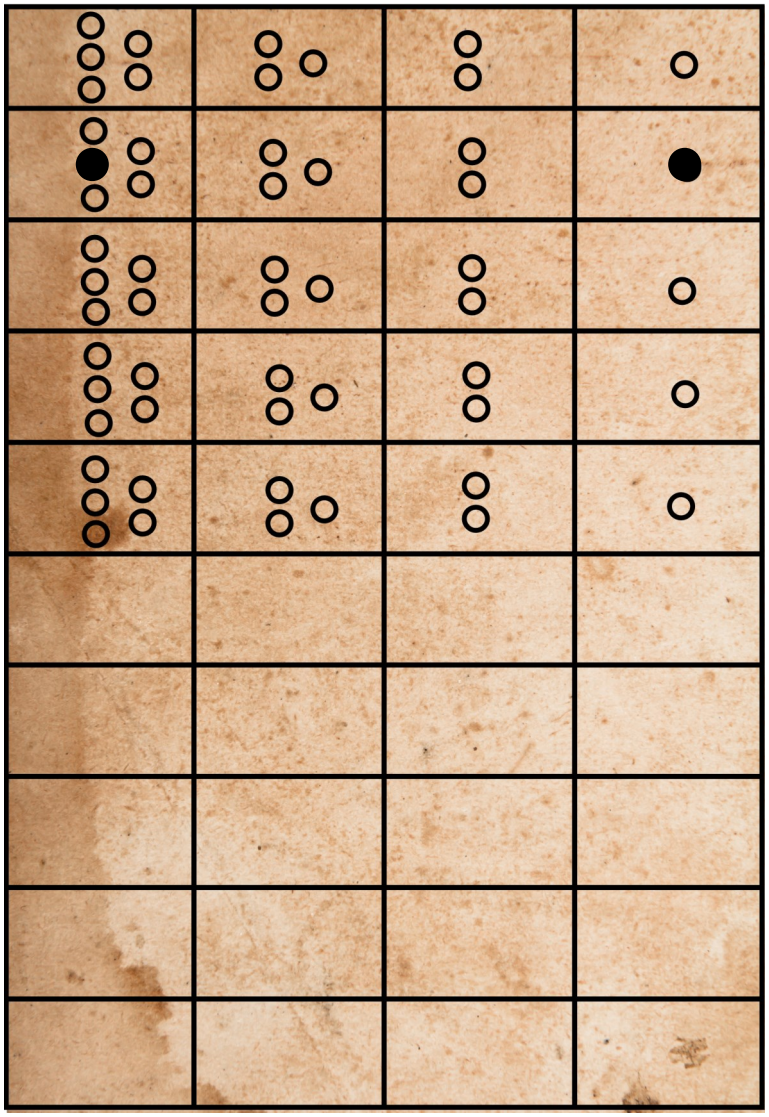
Representación del número 35

# YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA



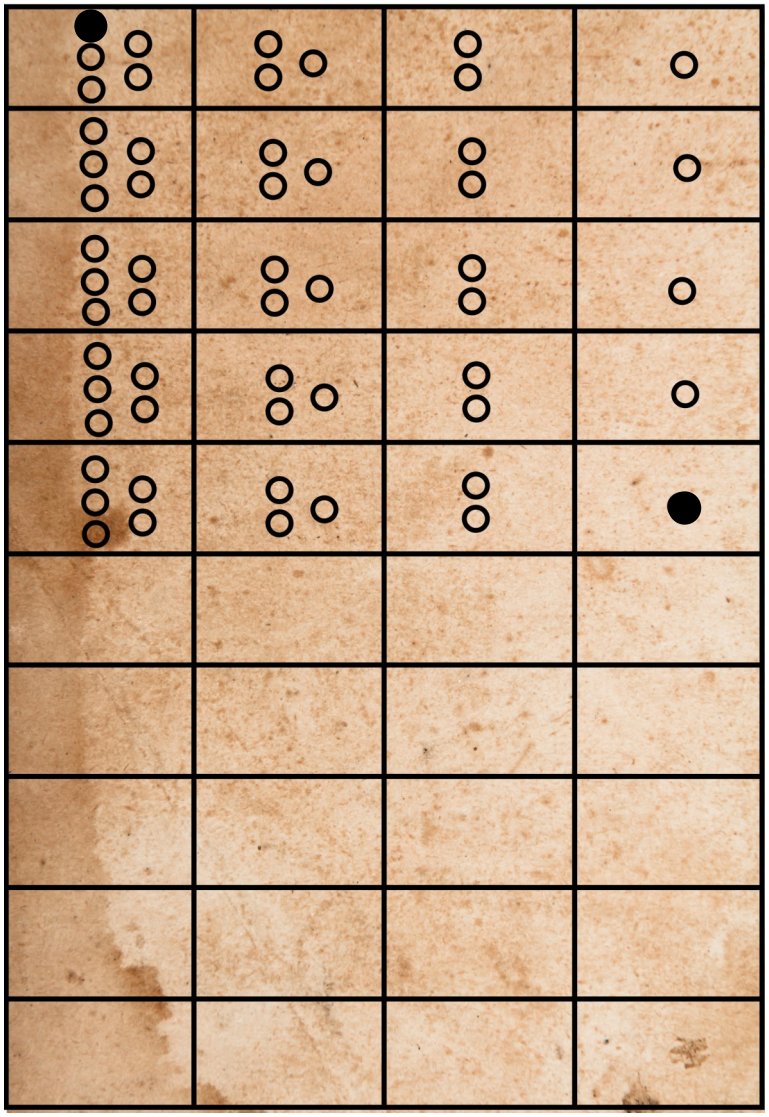
Representación del número 39

# YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA



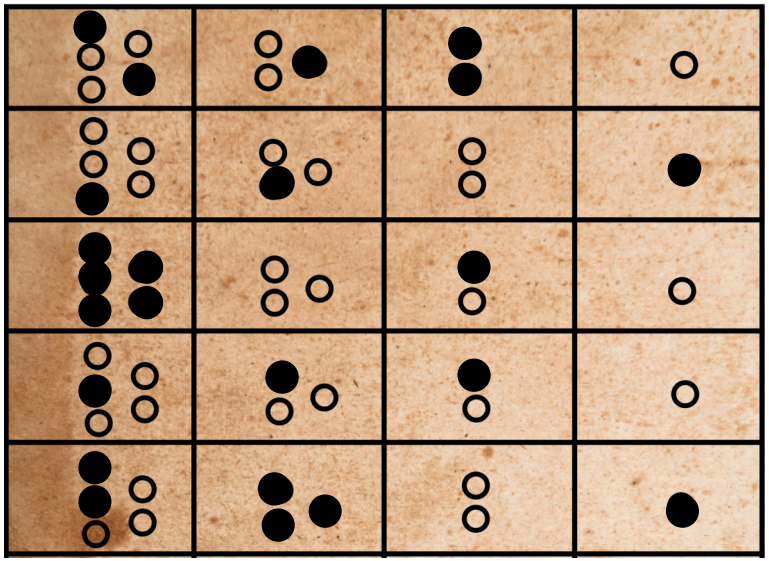
Representación del número 2 002

# YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA



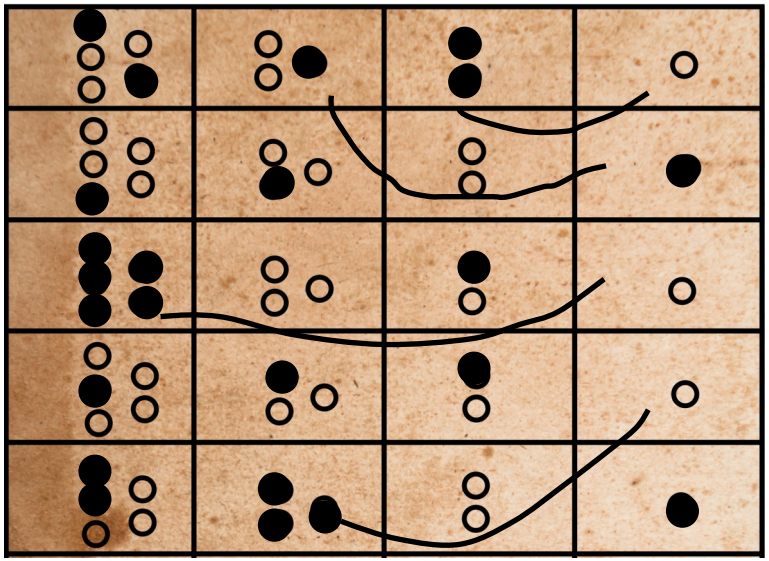
Representación del número 10 005

# DESCIFRANDO LA YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA



El siguiente esquema de puntos es una réplica del libro “Nueva crónica y buen gobierno” de Don Huamán Poma de Ayala. Con lo aprendido de nuestra yupana Huarochirana, vamos descifrar cuál acaso, el número o la operación que se representó en aquel misterioso dibujo.

# DESCIFRANDO LA YUPANA DE HUAMÁN POMA DE AYALA



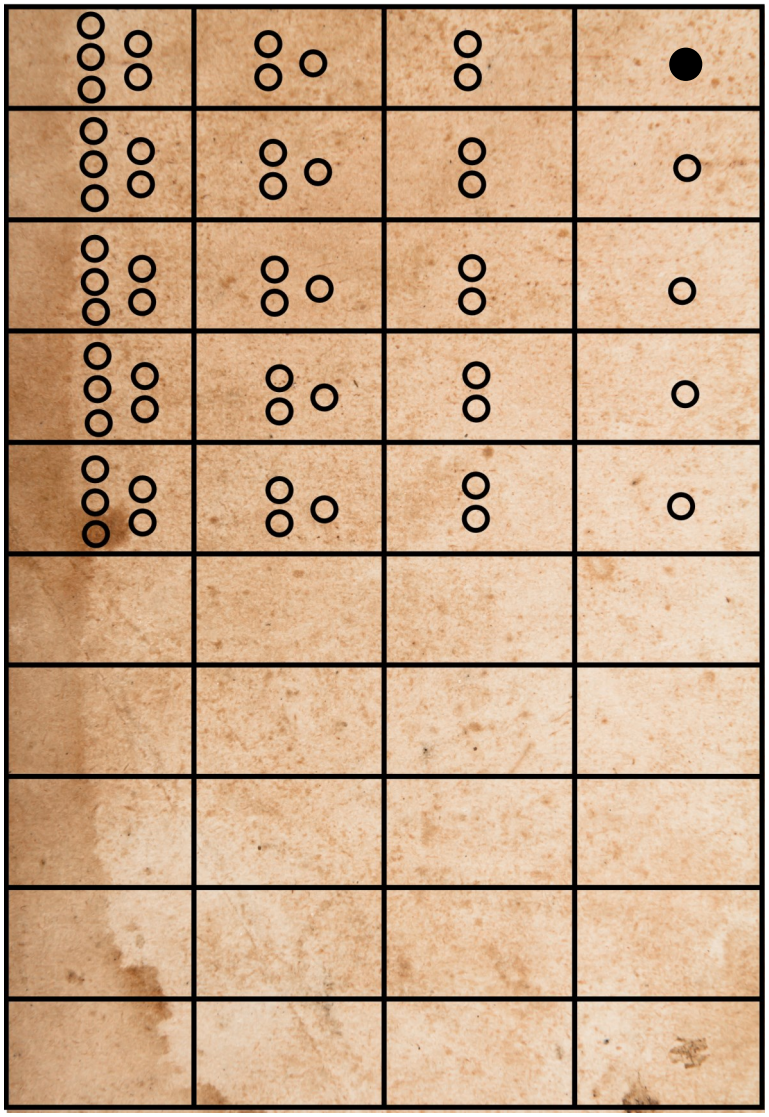
| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 001 | 1 | 11 | |
| 200 | 20 | | 2 |
| 33 333 | | 30 | |
| 4 000 | 400 | 40 | |
| 55 000 | 555 | | 5 |

El siguiente esquema de puntos es una réplica del libro “Nueva crónica y buen gobierno” de Don Huamán Poma de Ayala. Con lo aprendido de nuestra yupana Huarochirana, vamos descifrar cuál acaso, el número o la operación que se representó en aquel misterioso dibujo.

Solo con fines didáctico, colocaremos el valor relativo de cada cantidad en cada recuadro de la yupana. Al final sumaremos y obtenemos un valor de 103 598 de algo.

Se interpreta que más que la representación de un solo número en la yupana, era la representación de diversas cantidades para luego ser operadas. Esto en el caso que el dibujo haya tenido una función de representar y no haya sido solo con fin de representar el dibujo de una yupana.

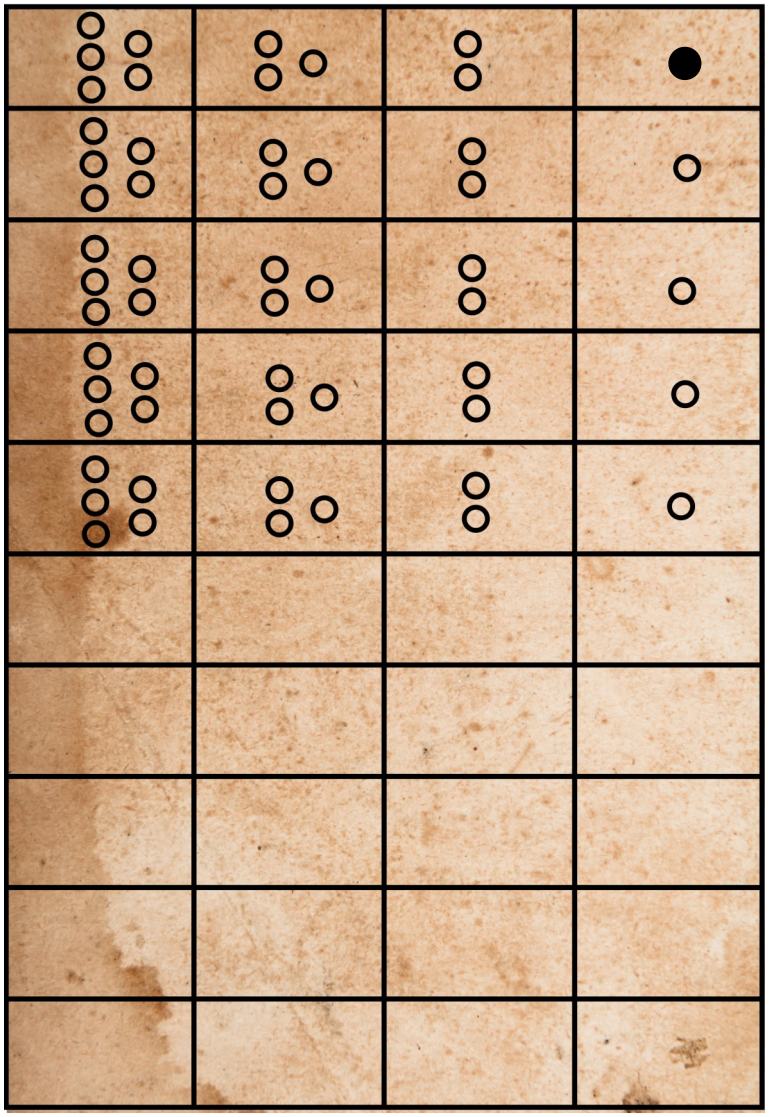
# POTENCIAL DE LA ESTRUCTURA DE LA YUPANA



Esta investigación es pedagógica y se enriquecerá con mayor información sobre la relación de las comunidades antiguas con su medio. Por ejemplo, si se demostrase que los huarochiranos ancestrales u otras culturas andinas como eln el tawantinsuyo de los incas ordenaban sus cosechas de dos en dos, entonces se podría dar una interpretación muy enriquecedora a la yupana de Don Huamán Poma de Ayala, por ejemplo: que cada semilla represente 2.

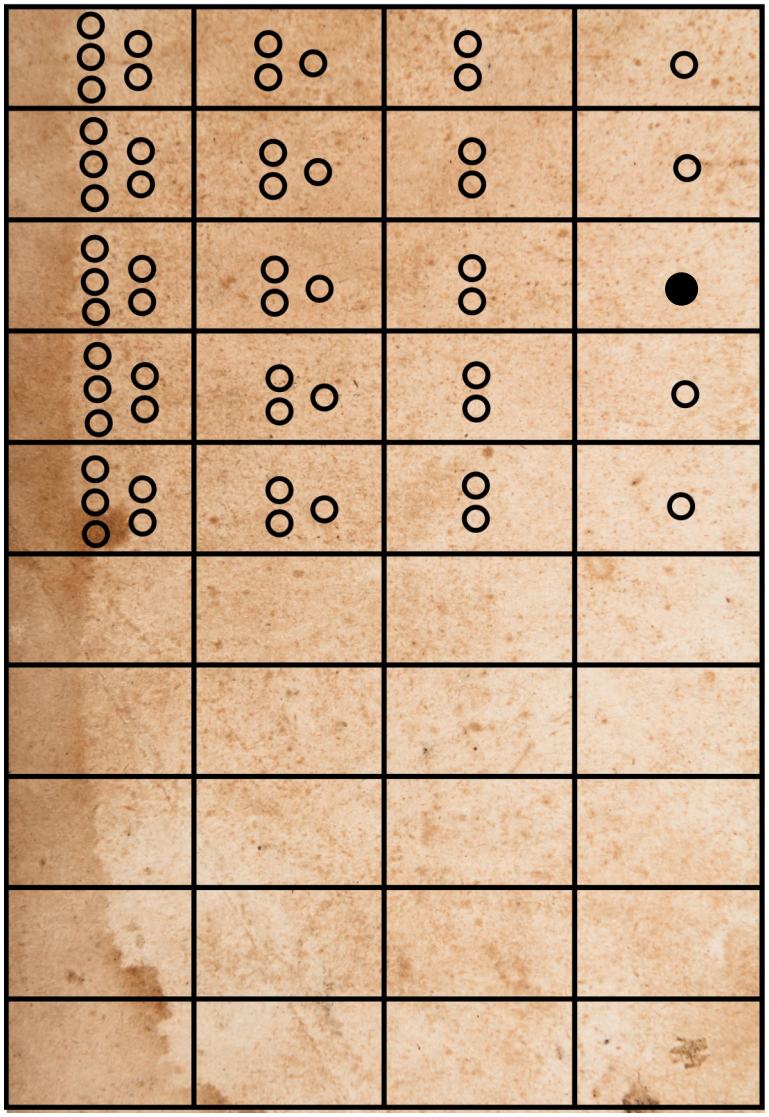
En este caso en la imagen estamos representando con una sola semilla es 2.

# POTENCIAL DE LA ESTRUCTURA DE LA YUPANA



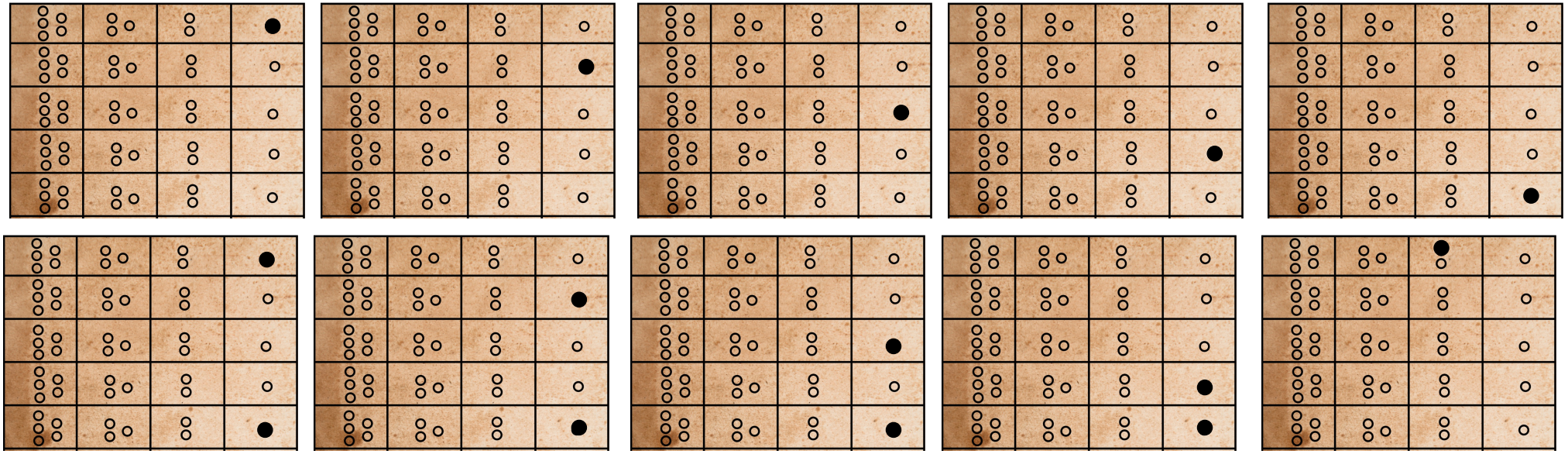
Representación de 4.

# POTENCIAL DE LA ESTRUCTURA DE LA YUPANA



Representación de 6.

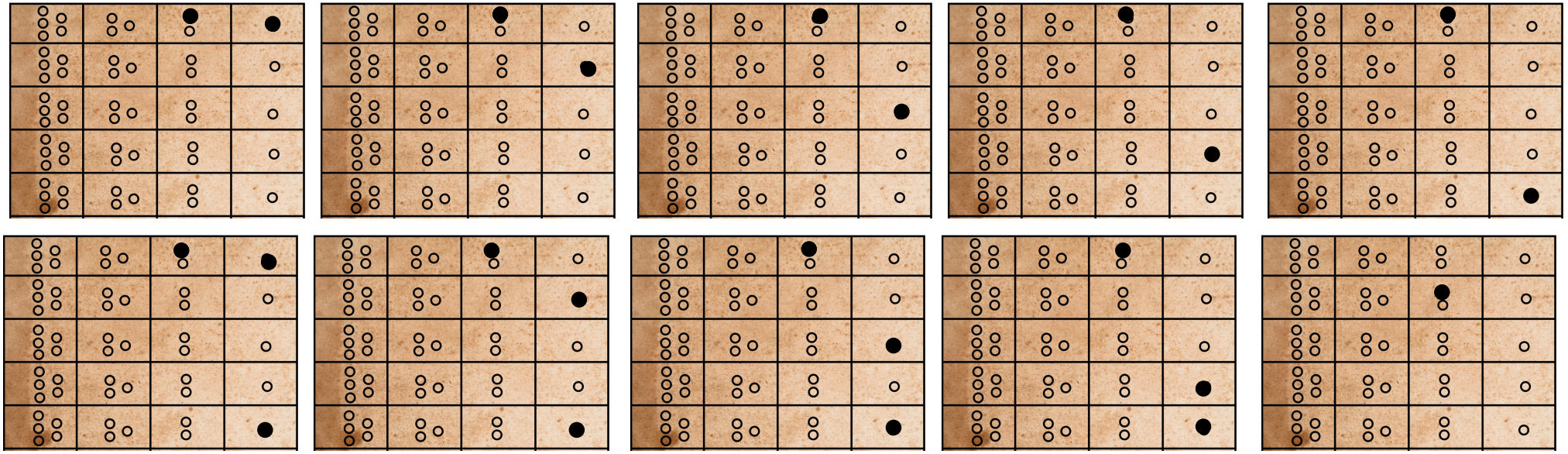
# POTENCIAL DE LA ESTRUCTURA DE LA YUPANA



En este esquema se representa, los números: 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 respectivamente. Obsérvese como el 20 se agrupa inmediatamente en la siguiente dimensión y como el 10 se representa en la dimensión 1, esto con fines de contar algo que se agrupe de a dos.

Es posible que en la yupana matriz hayan encontrado relaciones y patrones como el ciclo lunar; y que luego hayan construido una estructura de yupana que les permita representar y predecir con mayor eficiencia algún evento.

# POTENCIAL DE LA ESTRUCTURA DE LA YUPANA



En la fila 1 se representan los siguientes números: 22,24,26,28,30 y en la siguiente fila los número: 32,34,36,38,40.

De igual manera cada semilla, puede representar el valor de 2,3 4 y cualquier valor que sea de utilidad. Las yupanas, son materiales para representar y operar, quienes lo usan deben tener grandes conocimientos acerca de las matemáticas para darles uso y ampliar sus posibilidades.

# LA POSICIÓN DE LAS YUPANAS

Figura A

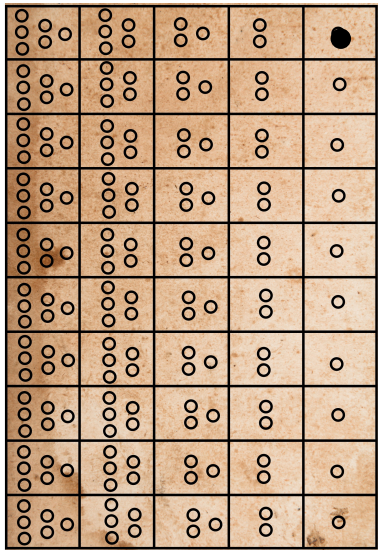


Figura B

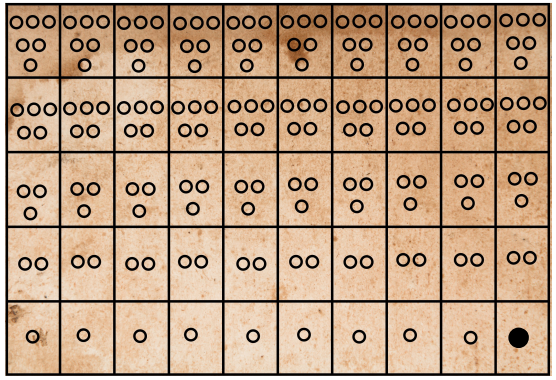


Figura C

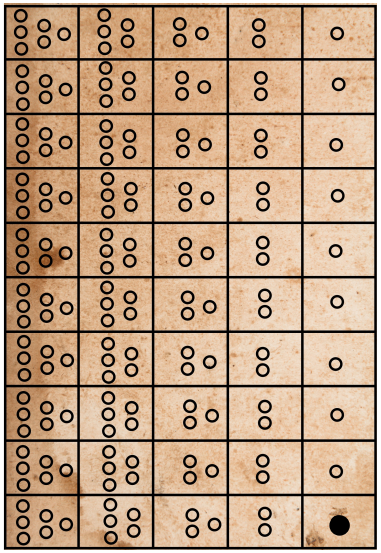
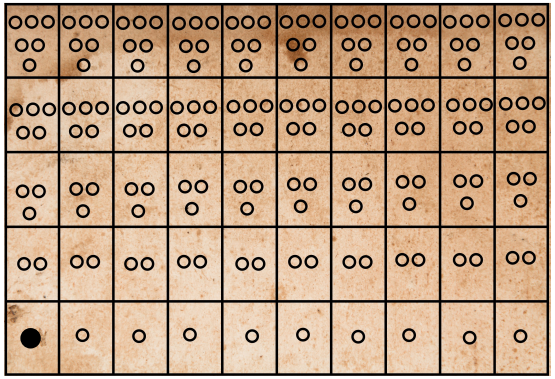


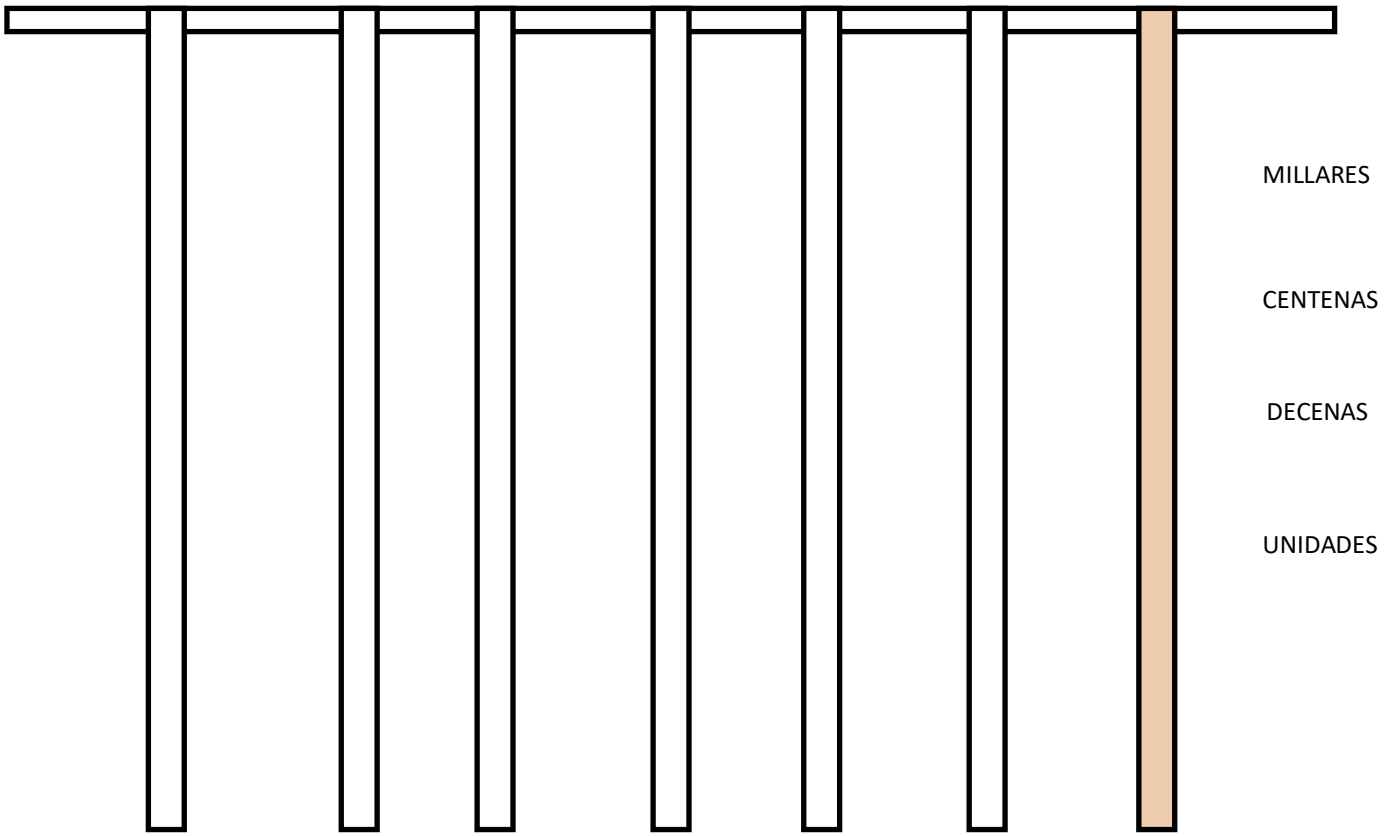
Figura D



Respecto a la orientación de la yupana, se ha elegido una orientación que sea didácticamente entendible. En las siguientes imágenes , por ejemplo se eligen diversas orientaciones para representar el uno. El que utilizamos es el de arriba hacia abajo, pero podemos contar de abajo hacia arriba, de derecha hacia la izquierda y viceversa; siguiendo las mismas relaciones de fila, columna , valor de cero y dimensiones, no habrá ningún problema para la representación y operatividad, cuando sea claro las relaciones de formación de cantidad y estructura de grupos de diez.  Lo mismo sucederá con la yupana  que se representa en la obra de Don Huamán Poma de Ayala.

Luego de realizar las operaciones, la información, se registra en los quipus. El esquema de la figura B y su forma de operacionalizar corresponde más a la forma como se organizan los quipus de los ordenes mayores hacia los menores. Actualmente, por ejemplo, utilizamos diversas formas de sumar: en horizontal, vertical,de igual forma el esquema de división de Perú y México son diferentes, uno opera hacia arriba y otro hacia abajo, sin embargo lo que no cambia son las relaciones de grupos, el total y los elementos por grupo en el reparto. Siempre y cuando tengamos en cuenta las relaciones descritas en la yupana matriz, las relaciones´de operacionalización serán lógicas.

# REGISTRO DE LOS NÚMEROS




La información era registrada en los quipus. Se podría interpretar que todo lo operado en una sola yupana, por ejemplo, la suma total, era registrado en un solo hilo. En otros caso he observado que si junto dos yupanas puedo explorar los números racionales, específicamente los decimales, también que si le damos un valor de 2, por ejemplo a cada semilla, nos permite explorar la noción de un número par o multiplicación. Con la agrupación y dándoles valores a las semillas, se puede explorar bases diferentes a la decimal. Quedará para otras investigaciones, validar o refutar esta investigación de tipo exploratoria sobre cómo nuestros ancestros construyeron sus números. Hoy hemos visto cómo nuestros ancestros usaban el cero magistralmente, uno de los inventos más grandes de la humanidad.

# REFERENCIAS


Bruner, J. (1984). Acción, Pensamiento y Lenguaje. Alianza.

Francisco de Avila (compliador). Manuscritos de Huarochirí. (1608?). Recuperado de http://www.letras.ufmg.br/padrao_cms/documentos/profs/romulo/ManuscritodeHuarochiriArguedas.pdf

Huamán Poma de Ayala. Nueva crónica, buen gobierno. (16015?). Recuperado de https://fundacion-rama.com/wp-content/uploads/2022/08/138.-Nueva-cronica-y-buen-%E2%80%A6-III-Guaman.pdf

Inca Garcilazo de la Vega. Comentarios reales. (1609). Recuperado de https://www.cusco.gob.pe/wp-content/uploads/2016/04/los-comentarios-reales.pdf

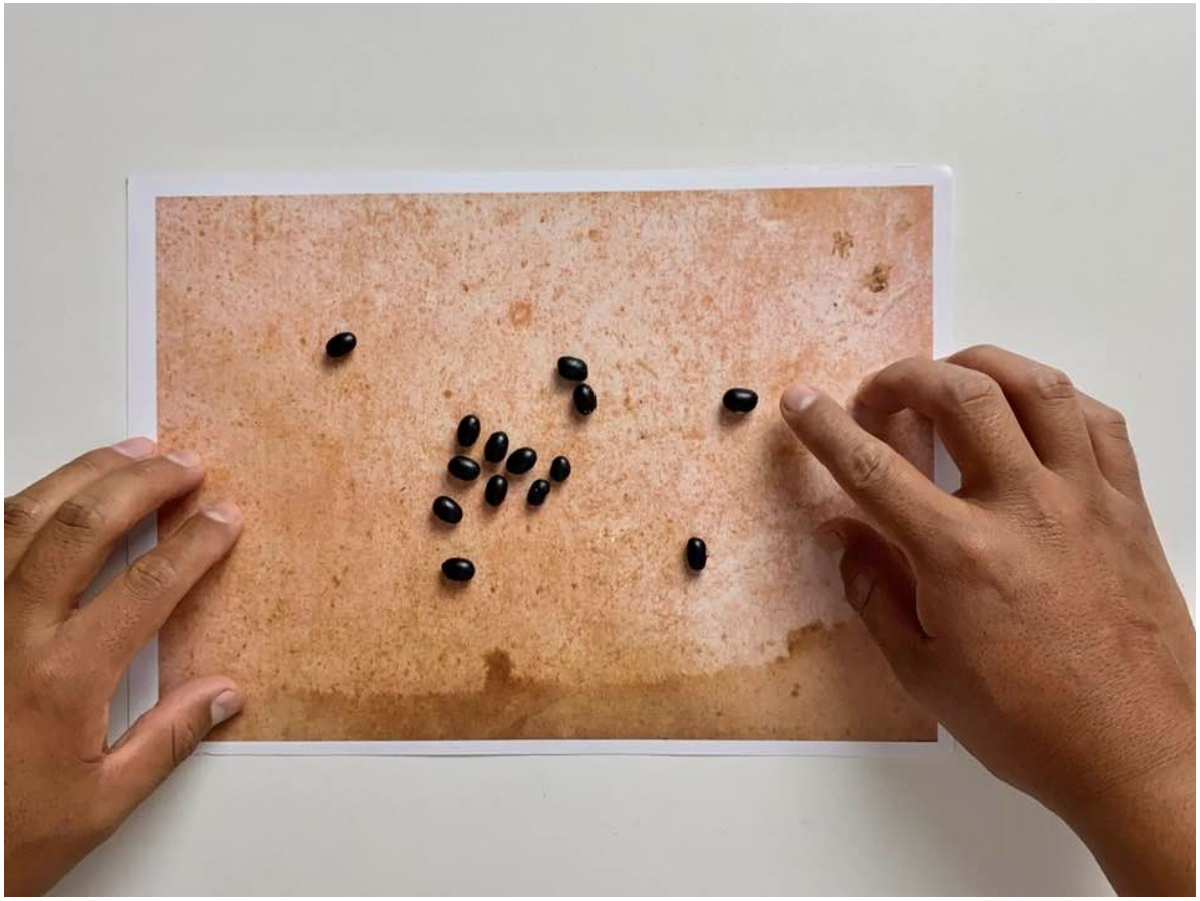
Ministerio Educación . (2016). Currículo Nacional. http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf.

Soto, J. (2019). Tocando los Números. Recuperado de https://tocandolosnumeros.com/wp-content/uploads/2023/12/LIBRO-POLICUBOS-Y-EL-CONSTRUCCIONISMO-MATEMATICO.pdf

Soto, J. (2023). Base Soto. Recuperado de https://tocandolosnumeros.com/wp-content/uploads/2023/09/BASE-SOTO-Y-LOS-NUMEROS-BINARIOS-SOTO-02.pdf

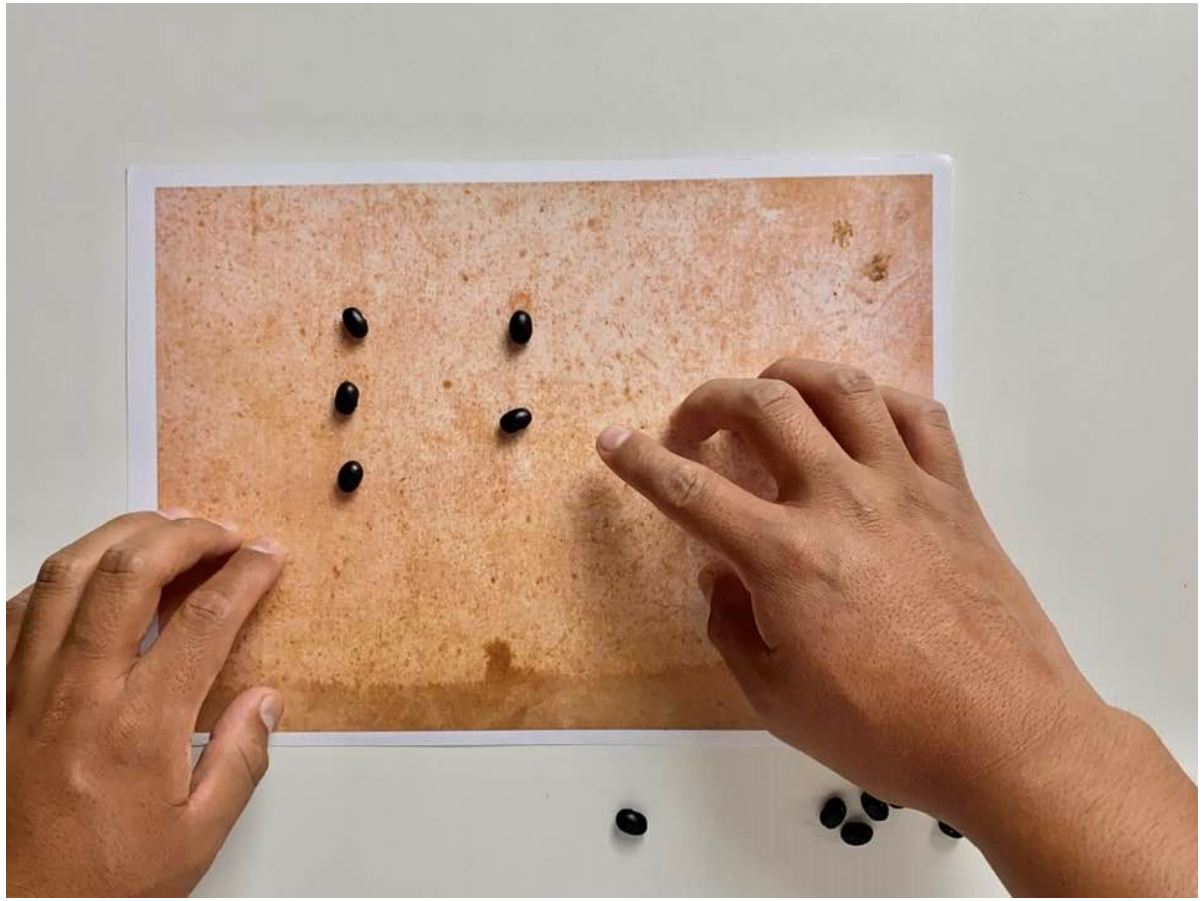
# ANEXOS

# ELEMENTOS TANGIBLES



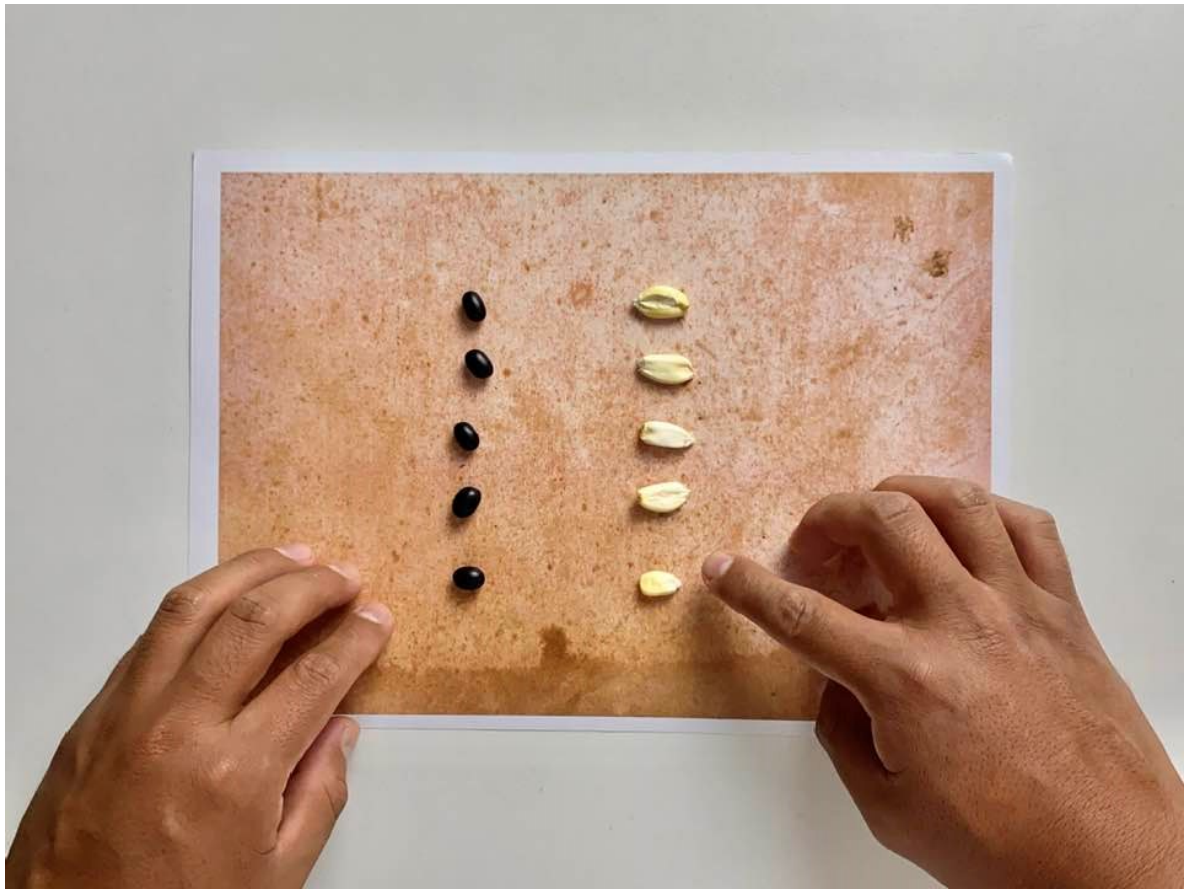
Las semillas, la superficie son elementos tangibles que posibilitaron acercar a los primeros hombres de los Andes y Amazonía a los primeros números, a ordenar las cantidades en un sistema de agrupación. Las semillas siendo un material concreto empezaron a representar a otros elementos cotidianos desde una papa, una bolsa de tubérculos hasta el número cien mil en la etapa más avanzada.

# ELEMENTOS TANGIBLES



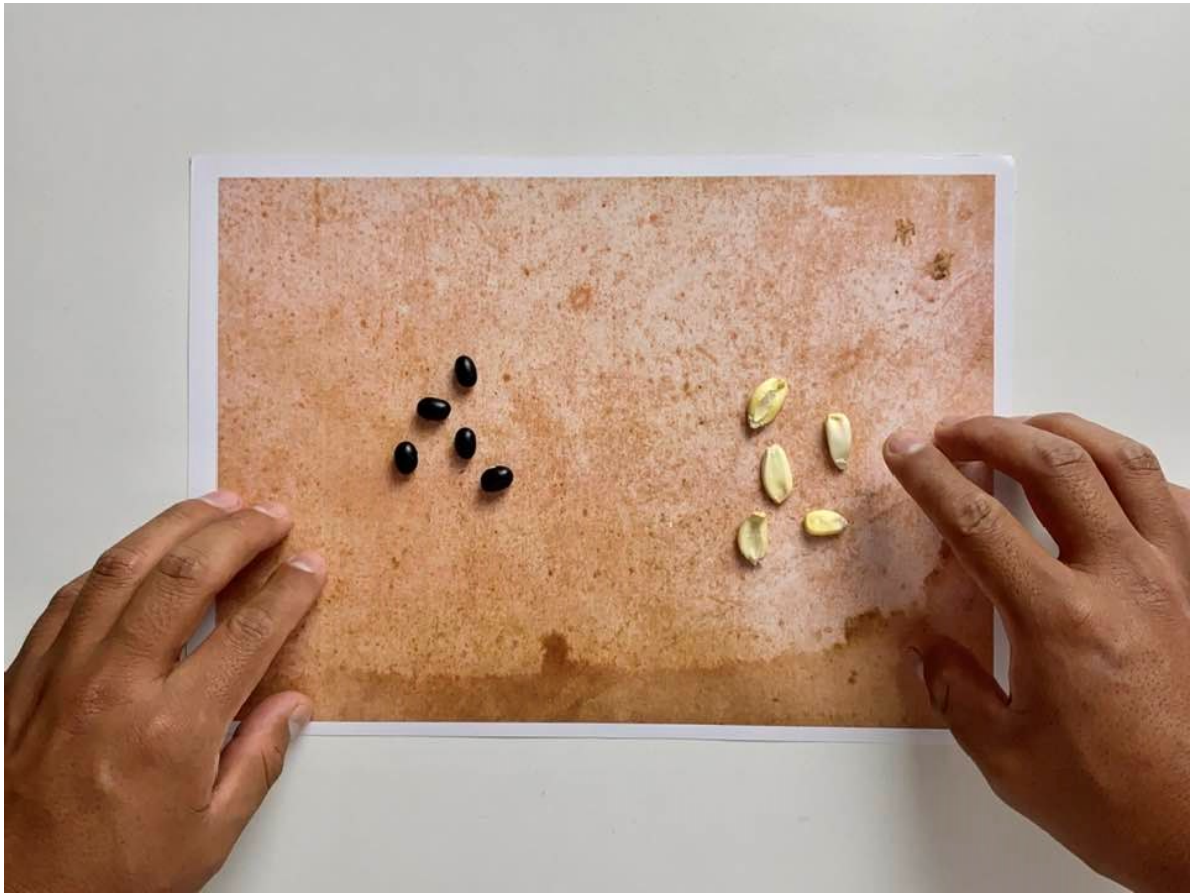
Las semillas, la superficie son elementos tangibles que posibilitaron acercar a los primeros hombres de los Andes y Amazonía a los primeros números, a ordenar las cantidades en un sistema de agrupación. Las semillas siendo un material concreto empezaron a representar a otros elementos cotidianos desde una papa, una bolsa de tubérculos hasta el número cien mil en la etapa más avanzada.

# ELEMENTOS TANGIBLES



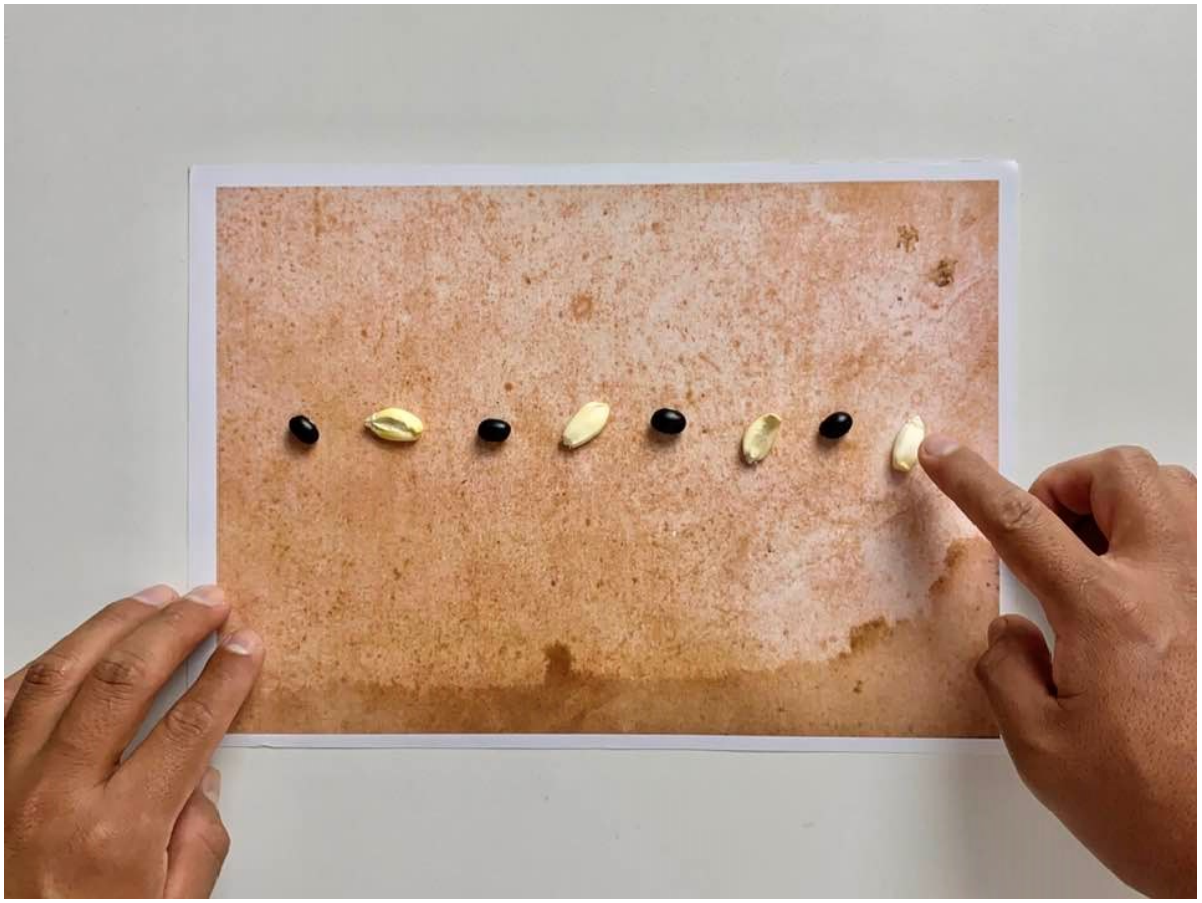
Hacer corresponder el elemento de un grupo con otro grupo para saber dónde hay más, dónde hay menos, cómo hacer para que tengan lo mismo. Esto en pedagogía se denomina correspondencia uno a uno y es una noción pre numérica.

# ELEMENTOS TANGIBLES



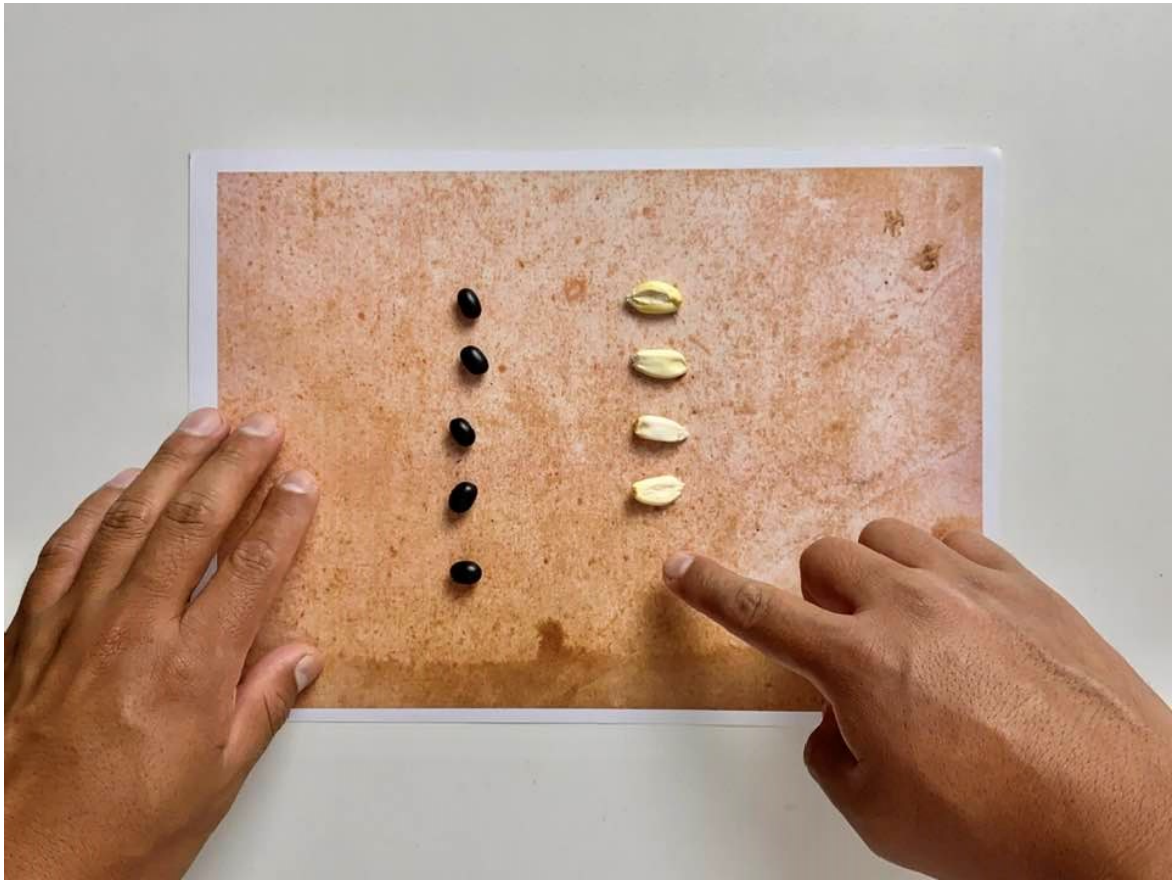
Al contar y observar que dos grupos de semillas tienen kimsa (cinco), se preguntan qué es kimsa, dónde está. Se abstrae y generaliza hasta que poco a poco el número va siendo descubierto y usado como tecnología.

# ELEMENTOS TANGIBLES



Encontrar secuencias en la naturaleza, les inspira a replicar estas situaciones con material concreto. La secuencia permite encontrar patrones que serán de mucha utilidad en el descubrimiento del número.

# ELEMENTOS TANGIBLES

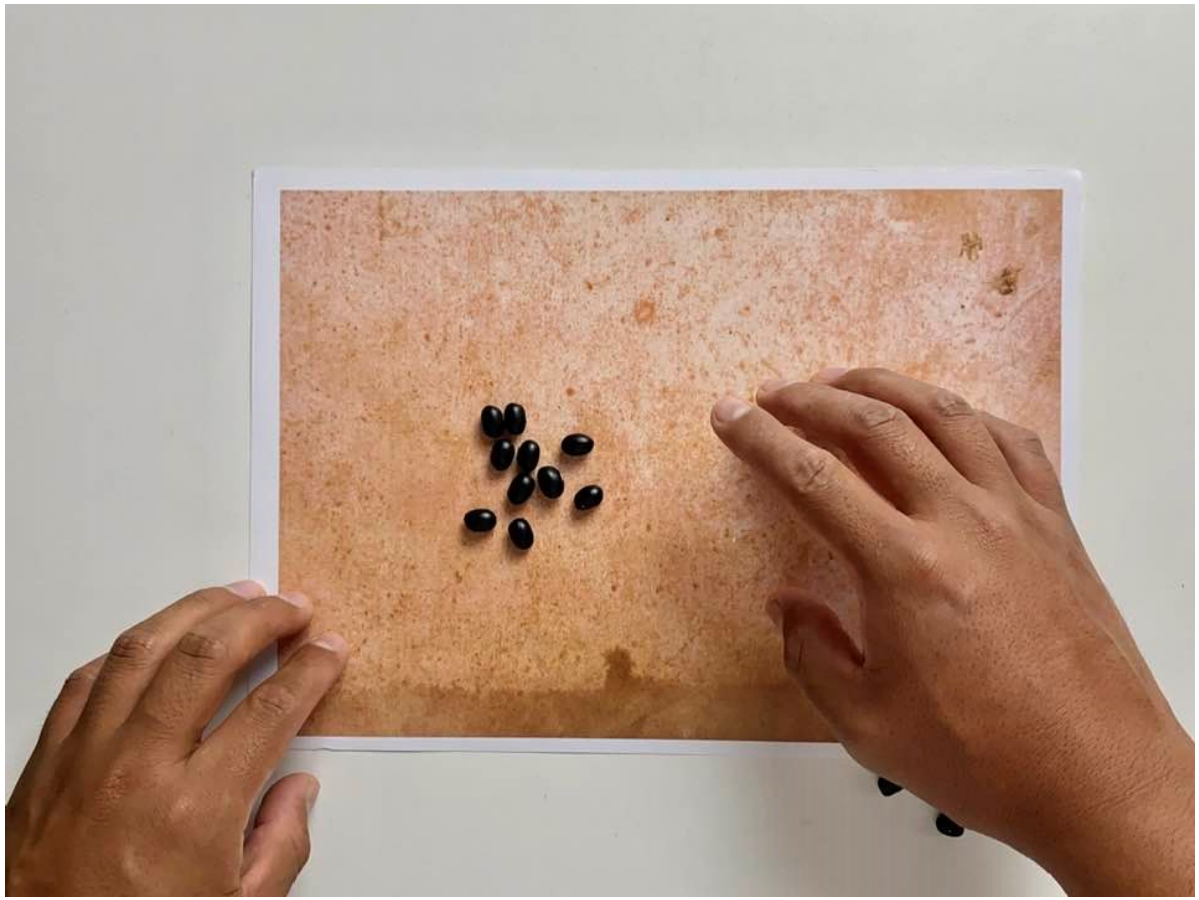


Comparar conjuntos mediante la correspondencia para luego igualarlos los acercó a encontrar el primer patrón matemático propiamente dicho: los números se construyen agregando una unidad.

# ELEMENTOS TANGIBLES

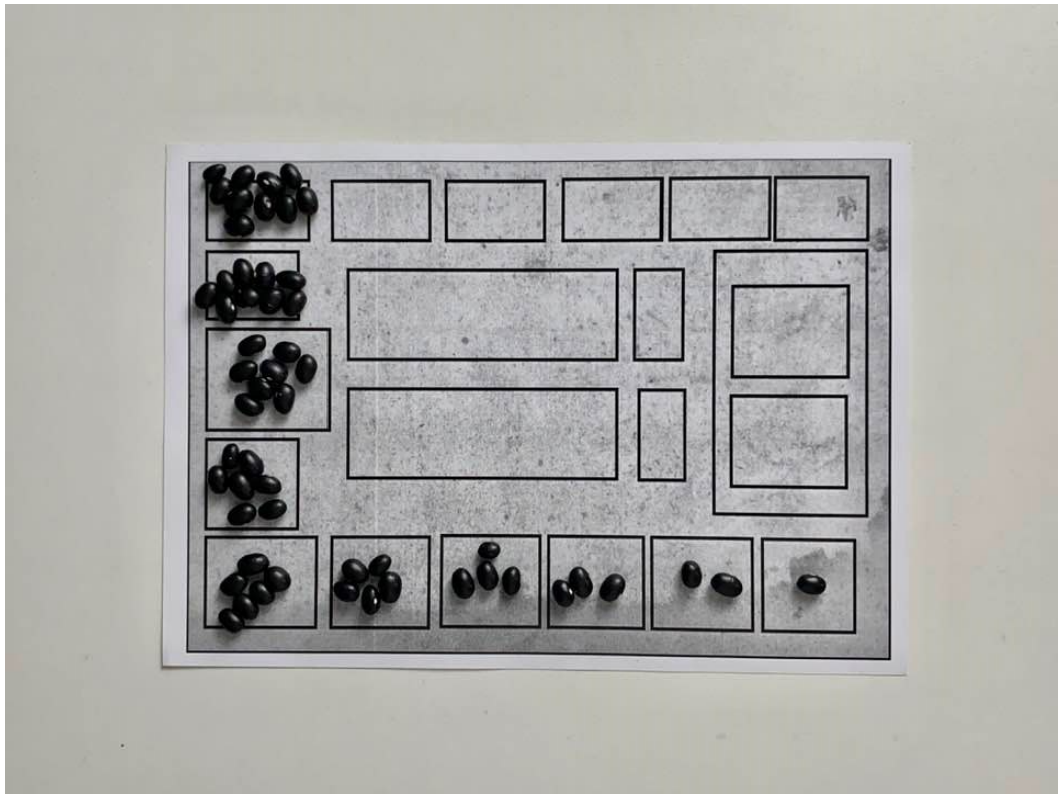
Todos los grupos por más diferentes que sean o posición que tengan son kimsa (cinco). Cuando uno consolida esa idea lógica ha desarrollado la noción de conservación de cantidad.

# ELEMENTOS TANGIBLES



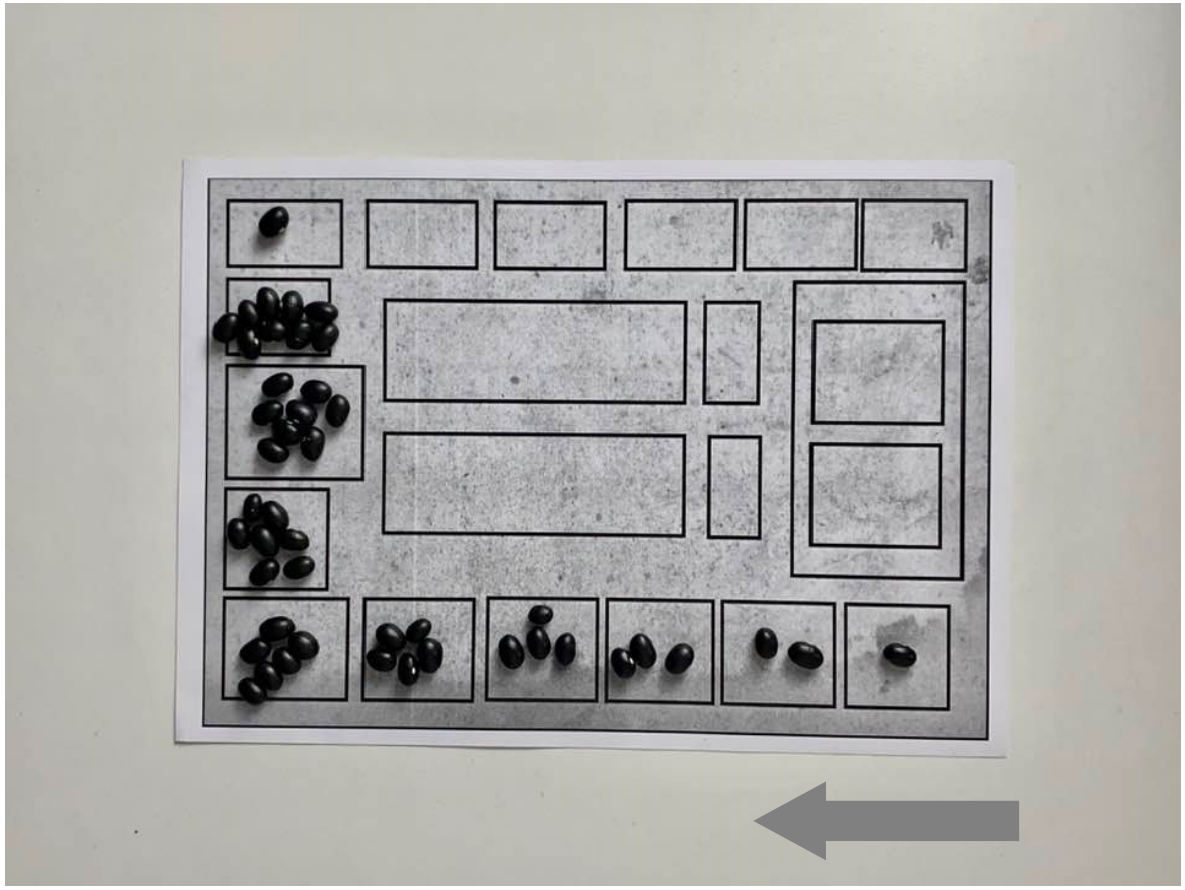
Por una razón natural o contextual muchas civilizaciones han agrupado sus cantidades de a diez.

# ELEMENTOS TANGIBLES



El material llamado taptana, tiene el potencial para ayudar a comprender la conexión que existe entre los números a través de sus cardinales, es decir, cómo el uno se conecta con el dos, cómo el dos se conecta con el tres. Los números se conectan o construyen agregando una unidad. Aquí, aún no se ha descubierto el cero, puede que se interprete como vacío o ausencia de cantidad, más no en el potencial de su uso.

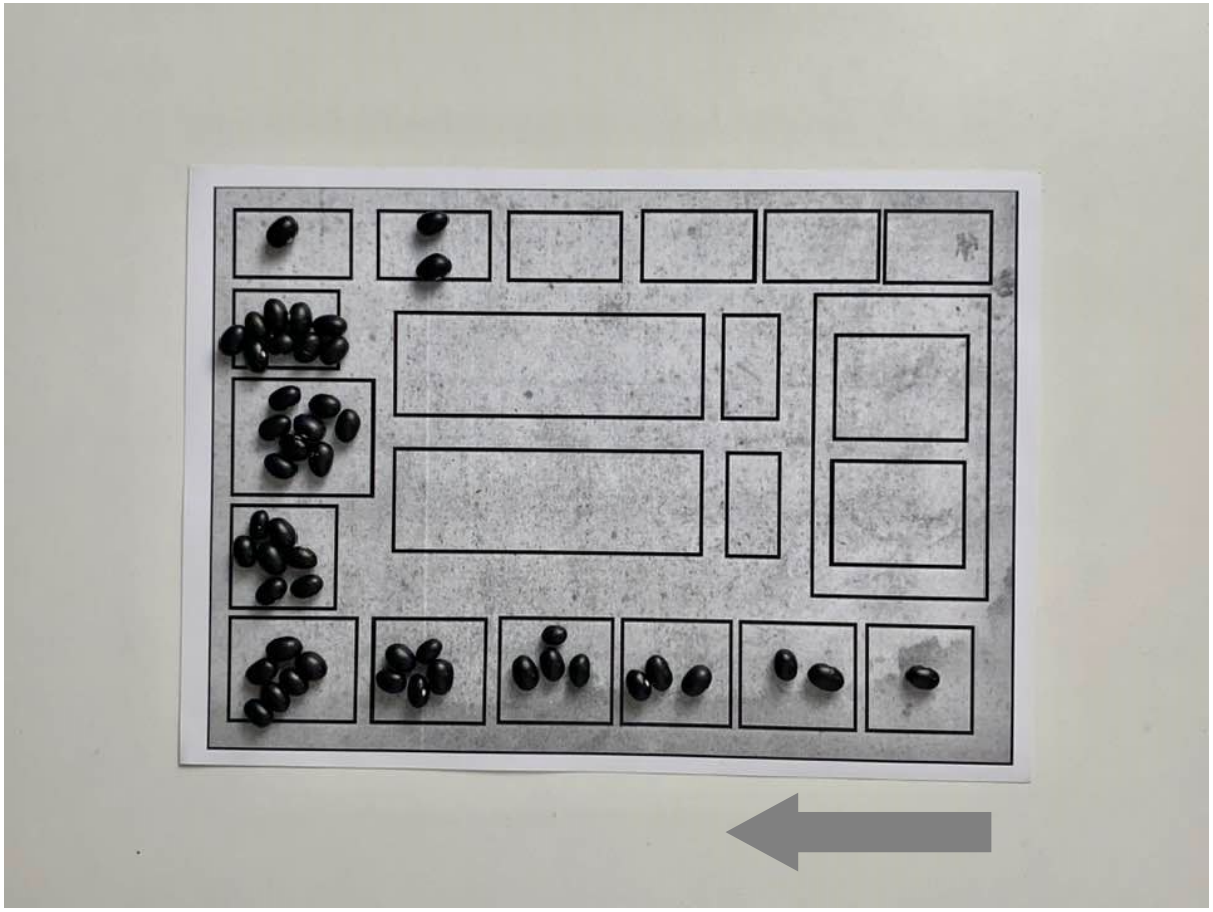
# ELEMENTOS TANGIBLES



Cuando se tiene un grupo de diez, se remplaza todo ese grupo por una nueva semilla que representa diez. Aquí, sucede un conflicto cognitivo que llamo el encuentro de los unos. Donde el 10 y el 1 tienen la misma representación a través de una semilla que cumple el rol de material concreto y manipulativo ¿Qué hacer para no confundir su representación?

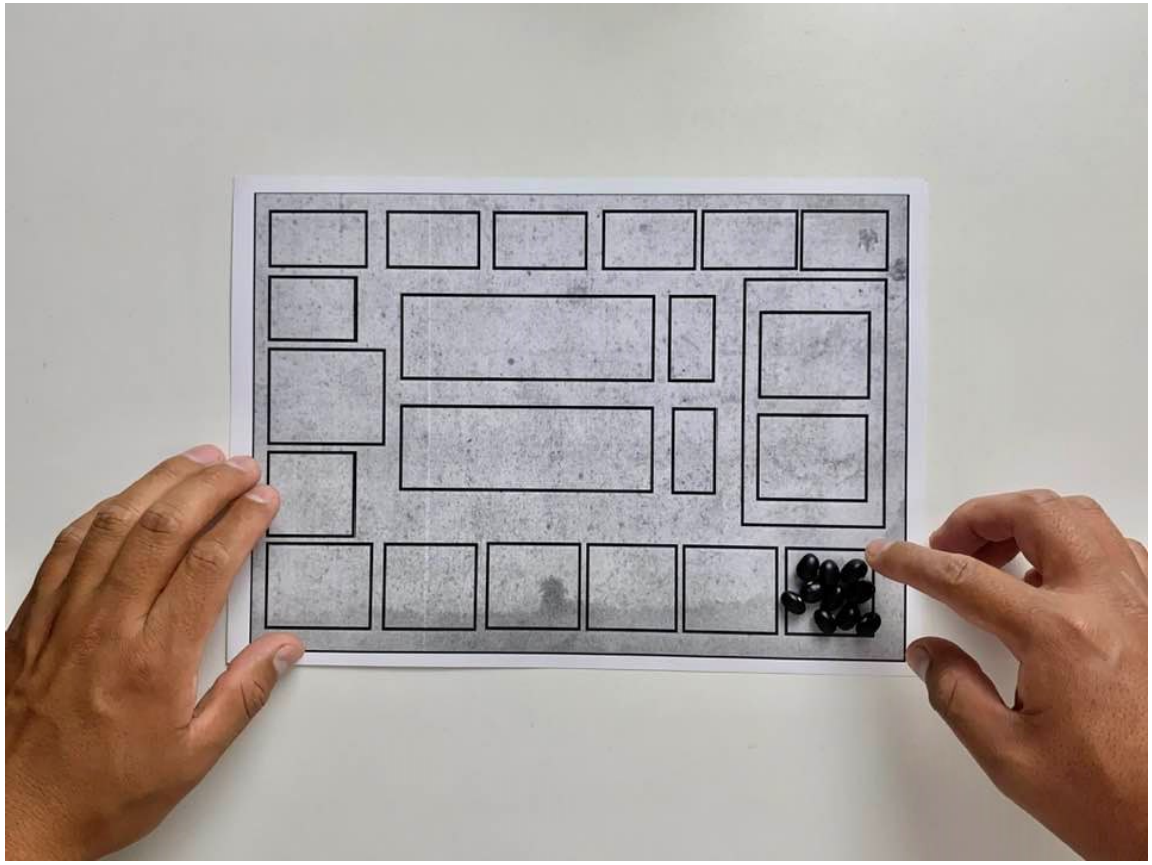
En la yupana matriz, encontramos la respuesta, pero aún quedan, en esta etapa muchas cuestiones por resolver.

# ELEMENTOS TANGIBLES



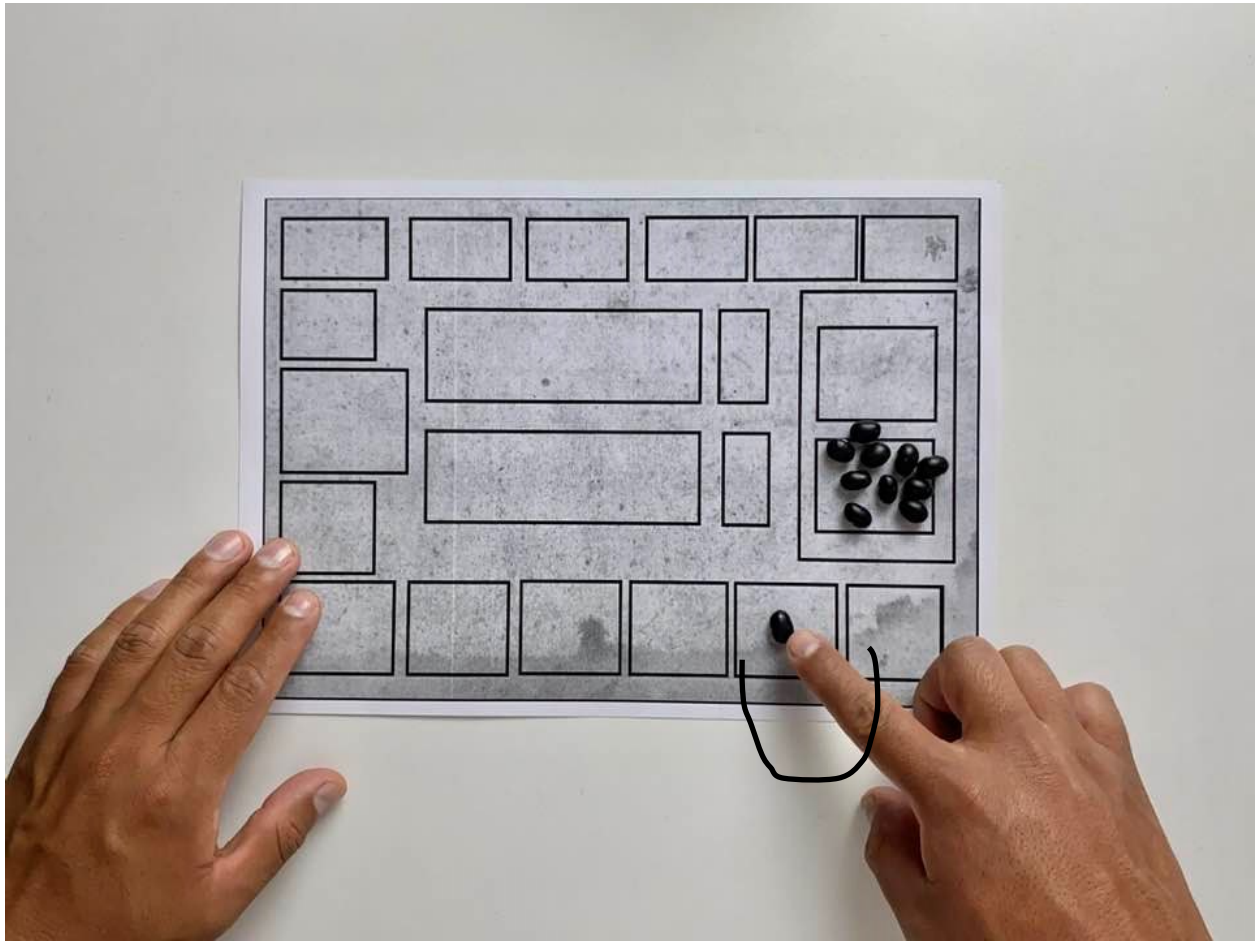
Si queremos seguir representando los números más grandes que diez, se tiene que encontrar una forma de hacerlo. En la representación del once, una decena y una unidad, el encuentro de los unos se hace inevitable, no solo por una necesidad de representar una cantidad más grande eficientemente, si no por cuestiones prácticas: mucha semillas son en sí mismas un impedimento para operar. Puede que haya surgido una convención aquí de colocar en la parte superior el orden mayor (decenas) y en la parte inferior el orden menor (unidades), esquema que se mantiene en los quipus.

# ELEMENTOS TANGIBLES



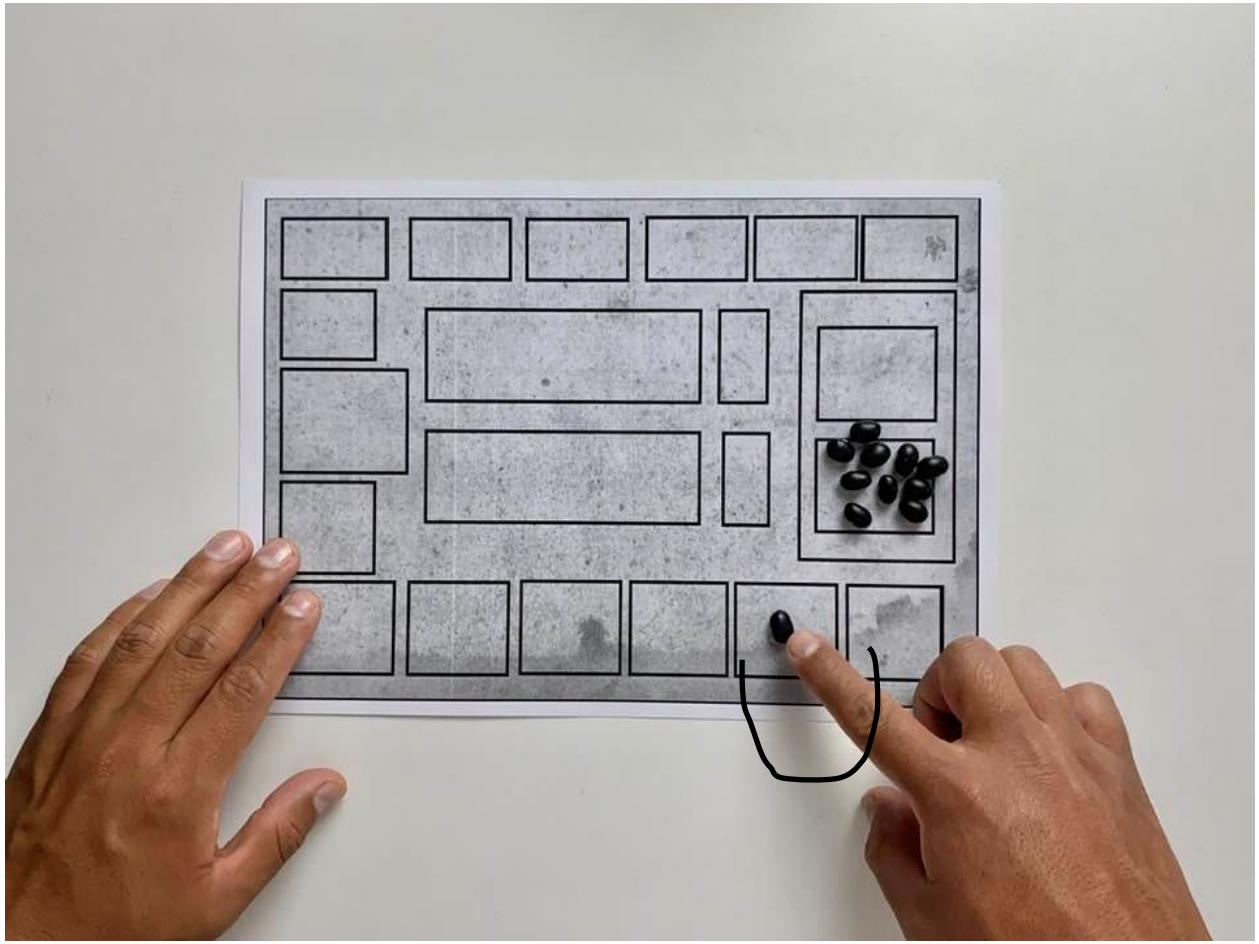
Se comienza desde el inicio con todos los conocimientos que se tienen para ordenar una estructura que tiene como matriz que se ordenan los grupos de a diez. Esta vez en el primer cuadro de la taptana se acumulan semillas hasta llegar a diez.

# ELEMENTOS TANGIBLES



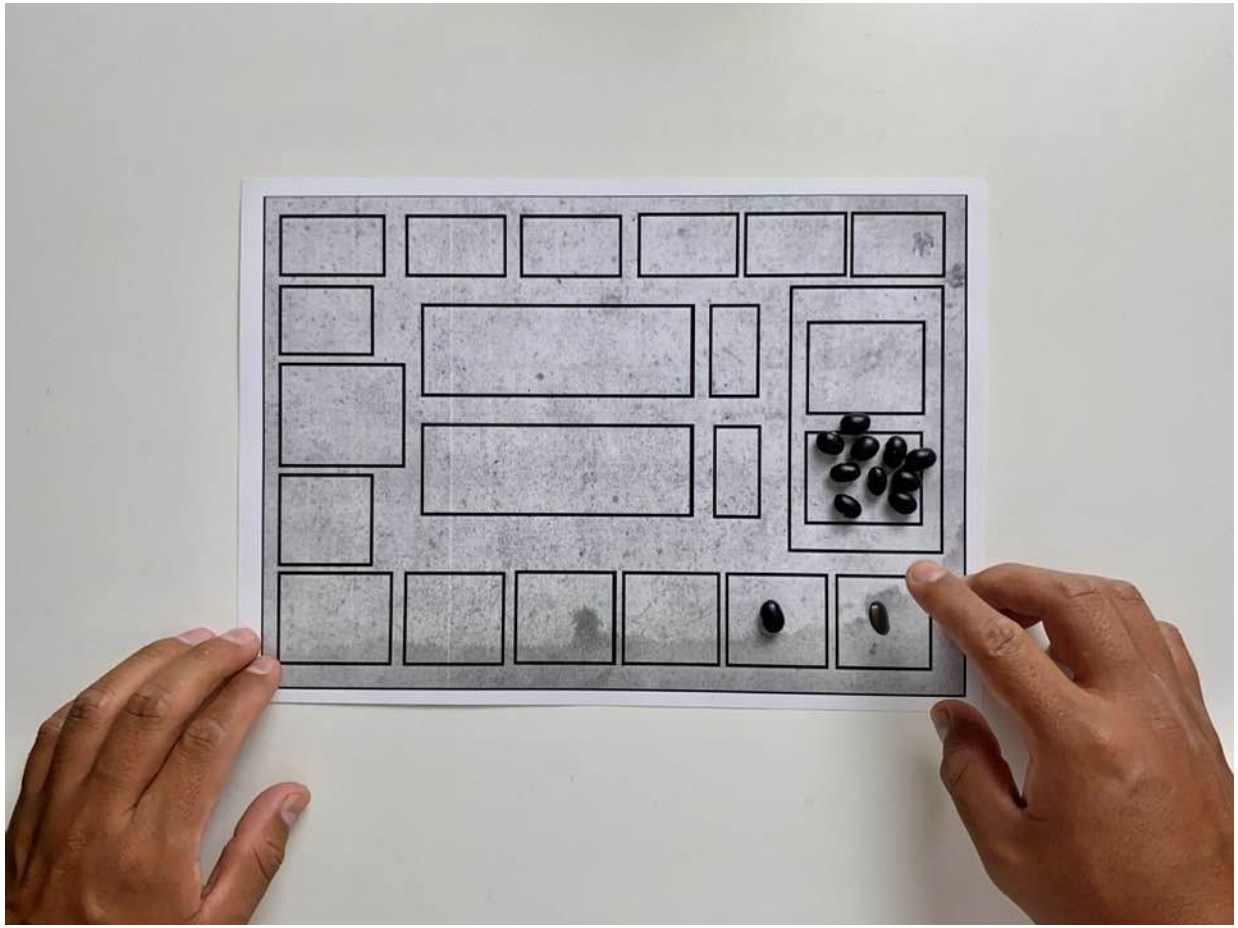
El grupo de diez es remplazado por una semilla que tiene el valor de diez. Las demás semillas, se llevan que ha sido remplazadas se acumulan en un lugar, es un laboratorio matemático.

# ELEMENTOS TANGIBLES



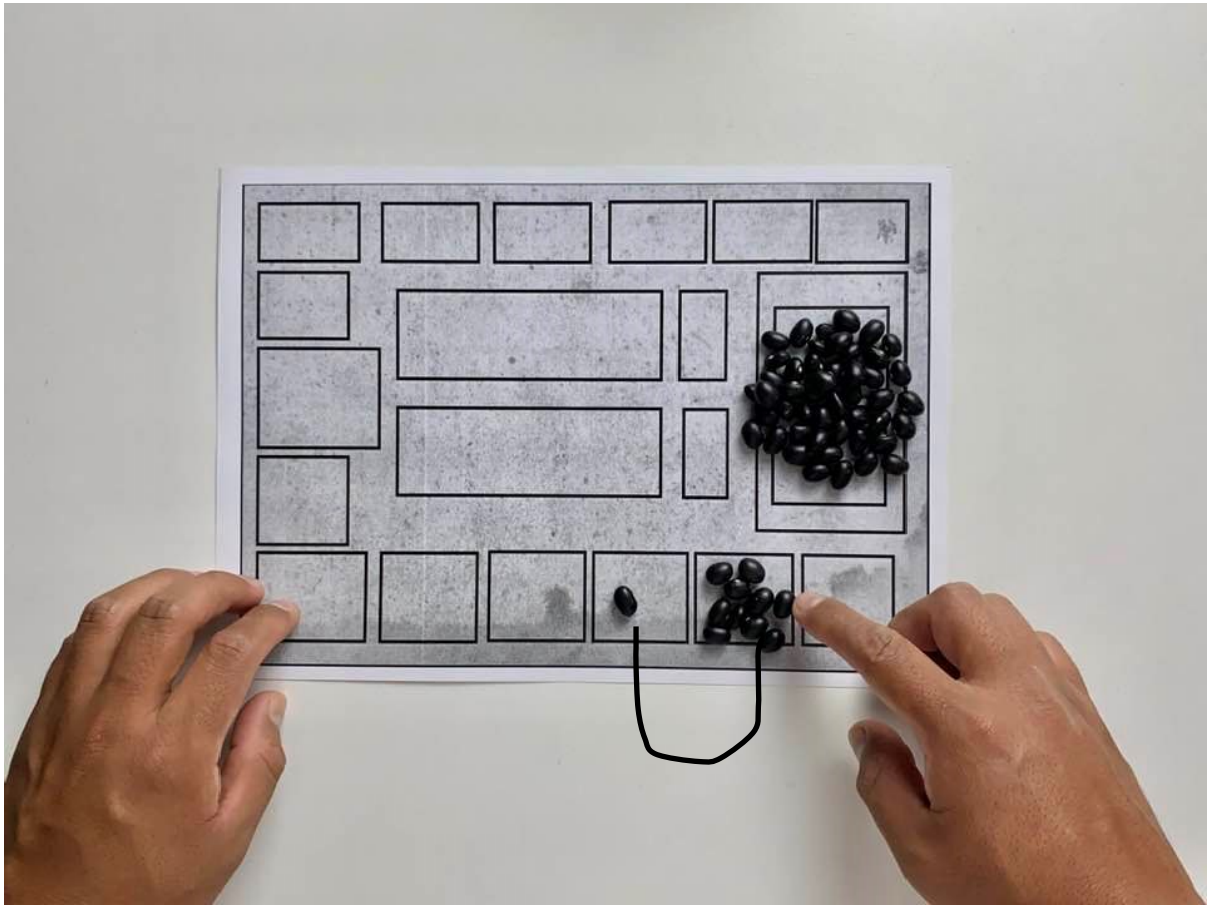
El grupo de diez es remplazado por una semilla que tiene el valor de diez. Las demás semillas, se llevan que ha sido remplazadas se acumulan en un lugar, es un laboratorio matemático.

# ELEMENTOS TANGIBLES



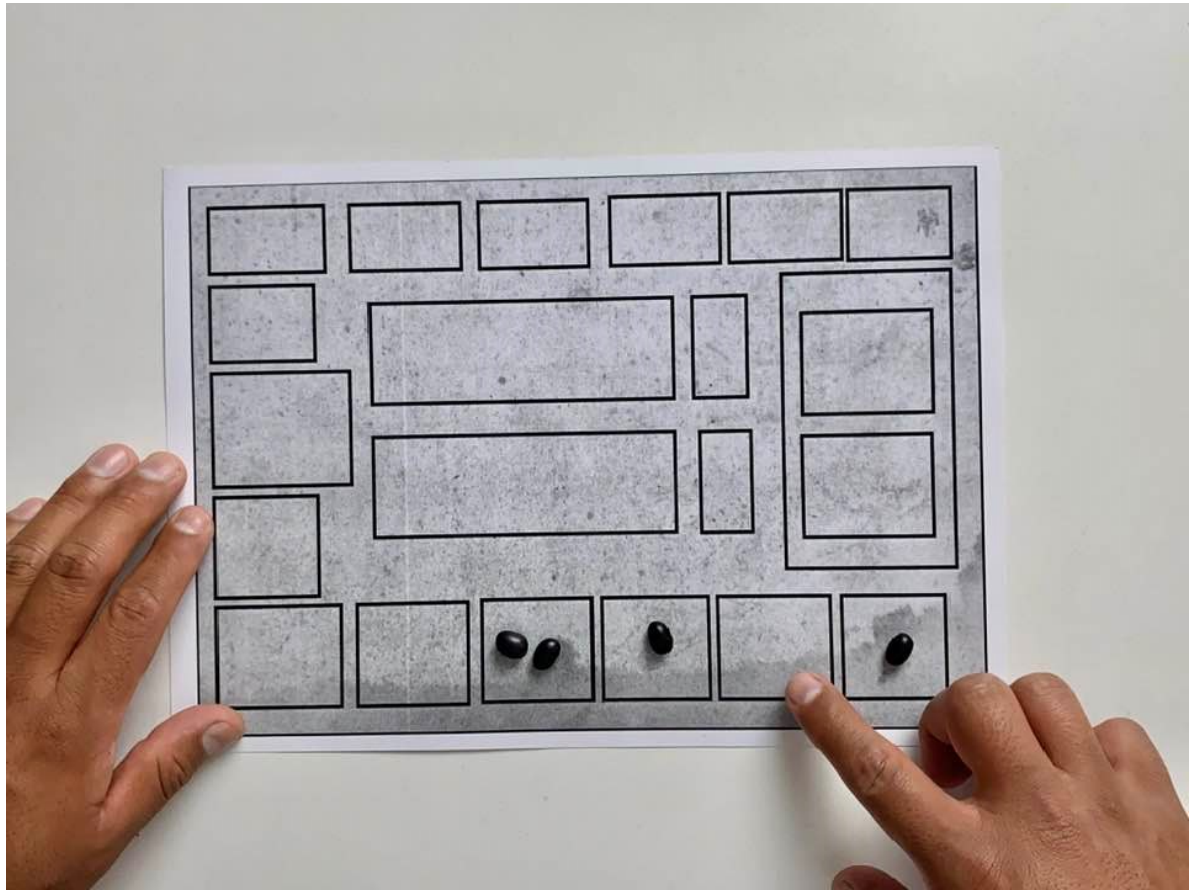
Luego, se coloca una semilla en la caja de las unidades. Se llega a la formalización de que en la primera caja, cada semilla tiene un valor de uno y en la segunda caja cada semilla tiene un valor de diez.

# ELEMENTOS TANGIBLES



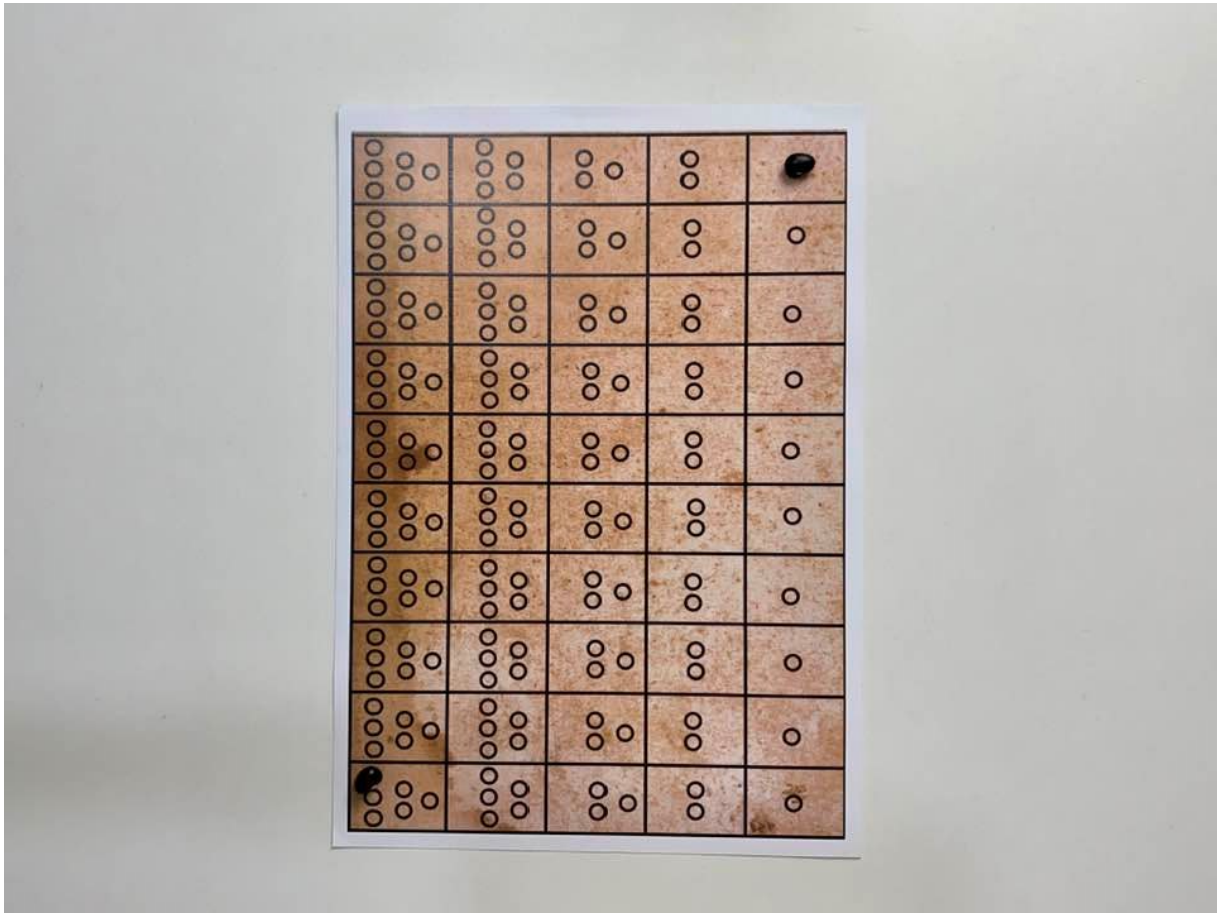
En la nueva cajita de semillas (de decenas), también se llegan a acumular diez, por lo que son remplazadas por una sola semilla que representa a los diez grupos de diez, es decir pacha (100). Las semillas que son remplazadas se acumulan para luego ser comprobado si este sistema es efectivo para ordenar y contar grandes cantidades.

# ELEMENTOS TANGIBLES



Esta caja vacía significa que hay cero semillas que valen diez en este espacio.

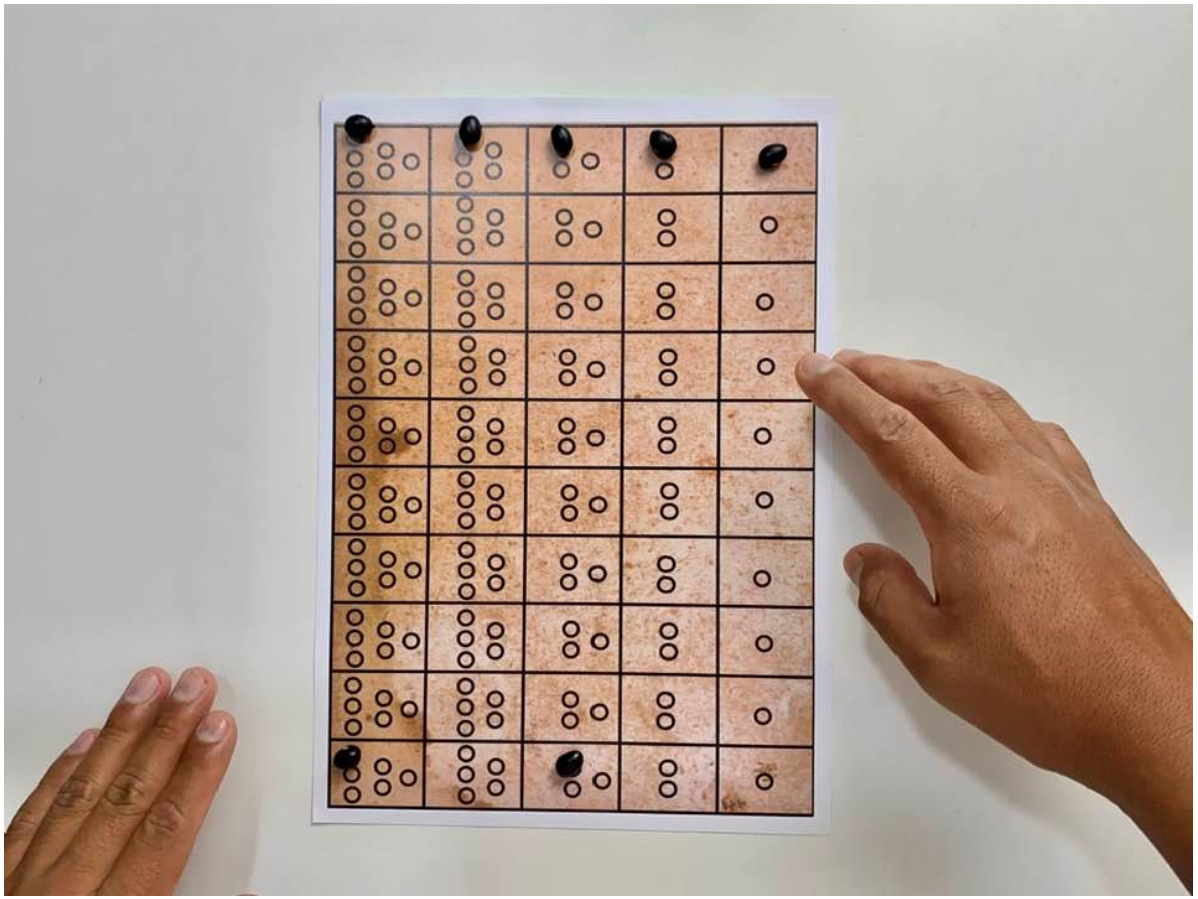
# ELEMENTOS INTANGIBLES



Los elementos intangibles, no es que no tengan un soporte físico, si no que su naturaleza principal son ideas lógicas y lógico matemáticas, por ejemplo, la estructura de la yupana matriz, sus dimensiones, conceptos y como se relacionan estos para representar y operar, la forma como el cero tiene un símbolo y modifica el valor de los otros números.

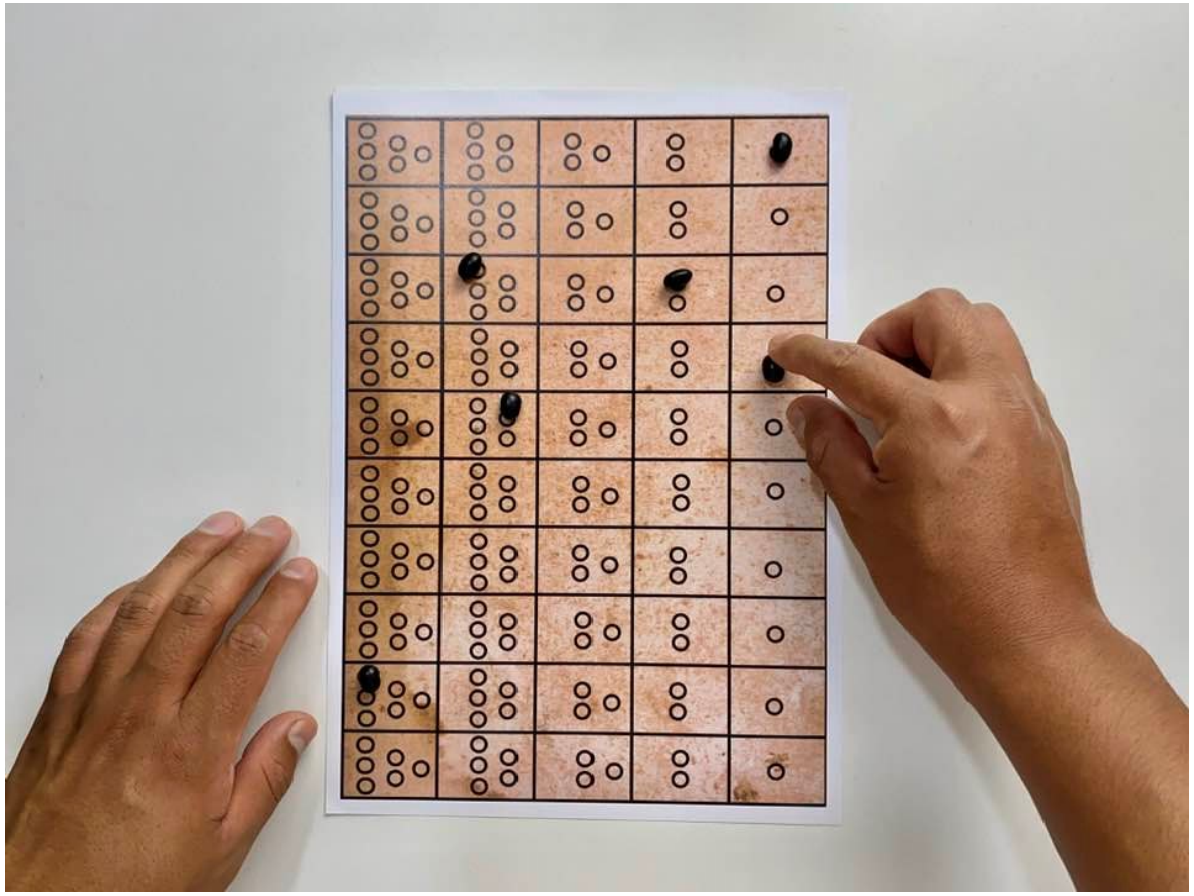
De igual manera la semilla, que antes era utilizada solo como material concreto, ahora es utilizada para representar números grandes dentro de un sistema de representación. En la figura, en cada esquina la representación de una unidad y un millón.

# ELEMENTOS INTANGIBLES



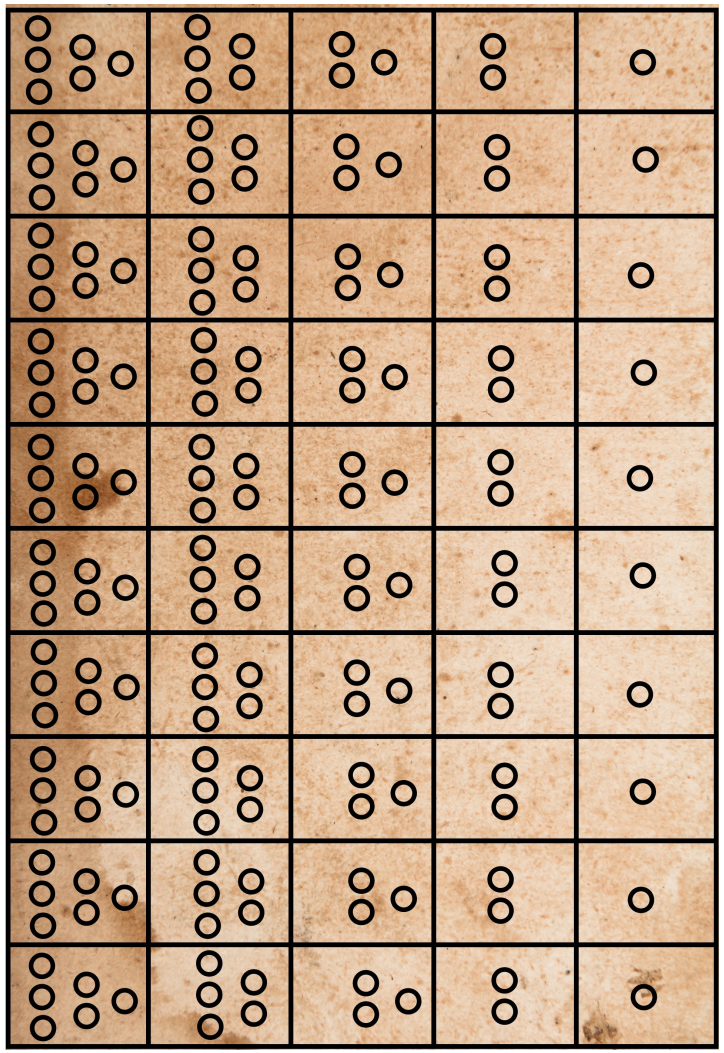
En la yupana, la representación de 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000, no es que cada semilla valga ello, es el sistema matriz de ceros y dimensiones que hace posible esta representación.

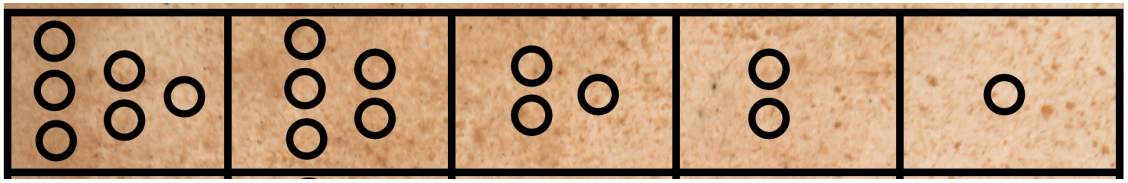
# ELEMENTOS INTANGIBLES



Este es un sistema que permite que cada cantidad pueda ser representado de muchas maneras, siguiendo un esquema de ideas lógicas. El constructo de dimensión que es importante para comprender este sistema evoca al ayllu o parcialidad.

# DIMENSIONES DE LA YUPANA SOTO INKA



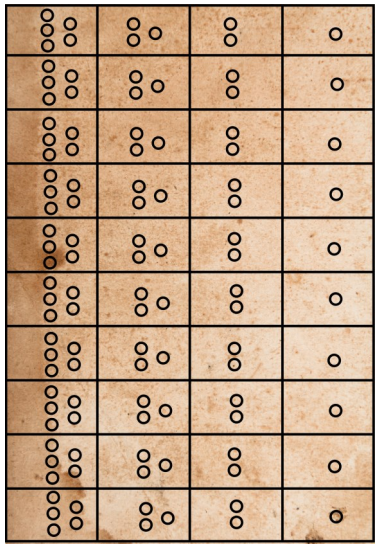


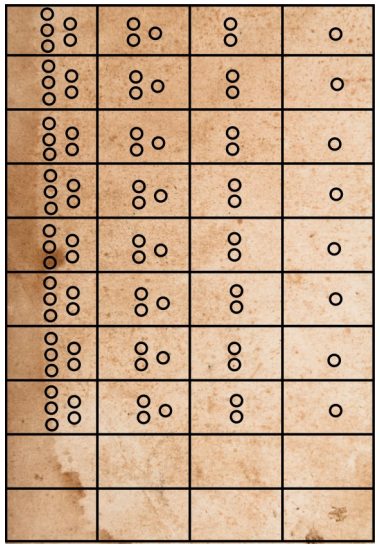
En la yupana matriz, hay un rastro de significado de pertenencia que se espera, tener una mayor comprensión en la segunda parte de este libro. Las matemáticas y sus estructuras no están desvinculados del medio. Como en los elementos tangibles e intangibles están en constante interacción.

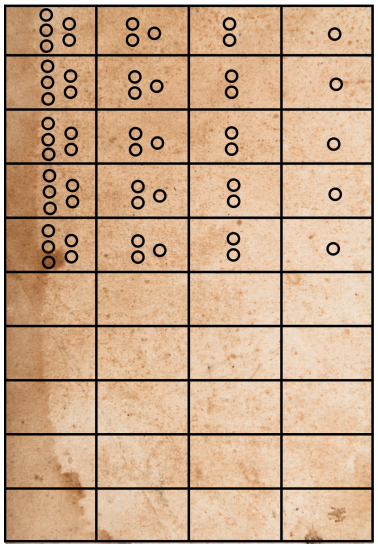
Se crea una nueva dimensión que incluye al nuevo orden y puede tener un espacio del mismo dentro de su dimensión.

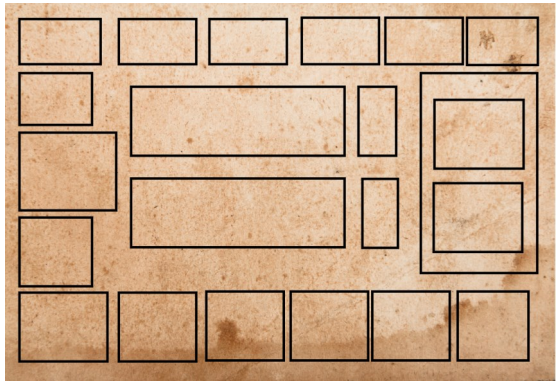
Nuestros antepasados quieren contarnos algo, estamos listos para escuchar.

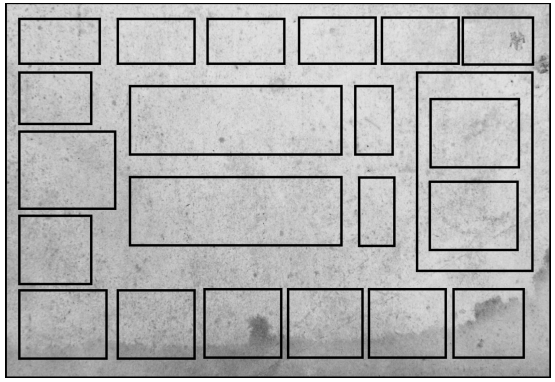
# ETNOMATEMÁTICAS Y DIDÁCTICA











Estos materiales junto a las cuerdas para los quipus son los que utilizamos para explorar el desarrollo de conceptos de las culturas nativas que habitaron estos lugares. Estos mismos materiales pueden ser usados y adaptados para su uso didáctico en la pedagogía. En esta primera parte del libro nos centramos en los contenidos relacionados a la aritmética, aunque como ya vimos estos se encuentran explicados en espacio, tiempo y dimensión para ser comprendidos.

**LIBRO "SOTO INKA: LA YUPANA HUAROCHIRANA"**

**2023, Juan Carlos Soto Fernandez**

**Autor-Editor:**

**JUAN CARLOS SOTO FERNANDEZ**
**Asoc. Virgen del Carmen La Era Ñaña MZ i LT 24**
**LURIGANCHO– CHOSICA**

**1a. edición – diciembre 2023**
**Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2023 - 12501**

**gerencia@tocandolosnumeros.com**
**www.tocandolosnumeros.com**
**Asoc. Virgen del Carmen La Era Ñaña MZ i LT 24**
**LURIGANCHO– CHOSICA.**

**TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS.**
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**
**REGISTRO INDECOPI EXPEDIENTE 004552-2023/DDA**

**Para solicitar la implementación del programa Soto Inka, la yupana Huarochirana, comunicarse a**
**gerencia@tocandolosnumeros.com Web: www.tocandolosnumeros.com - Telf.: (+51) 949 747 242 Lima-Perú.**